# Cálculo I

## Cálculo Diferencial para Bachillerato



Arturo Ylé Martínez/José Alfredo Juárez Duarte/Faustino Vizcarra Parra




## DIRECTORIO

**Dr. Víctor Antonio Corrales Burgueño**
Rector

**DR. José Alfredo Leal Orduño**
Secretario General

**LAE y MA Manuel de Jesús Lara Salazar**
Secretario de Administración y Finanzas

**Dr. Juan Ignacio Velázquez Dimas**
Director de Servicios Escolares

**Dr. Armando Flórez Arco**
Director de DGEP

# Cálculo I

## Cálculo Diferencial para Bachillerato

Autores:

Arturo Ylé Martínez
José Alfredo Juárez Duarte
Faustino Vizcarra Parra

Revisión Técnica:

Dr. Armando Flórez Arco

# Cálculo I

Cálculo Diferencial para Bachillerato






# Cálculo I

Cálculo Diferencial  Para Bachillerato
Tercer grado, primer semestre
Fases especializadas: Físico-Matemáticas y Químico-Biológicas
Primera Edición 2012.



Diseño portada:
**Eva Margarita Moreno Chávez**

Diseño de interior:
**Irán Sepúlveda León**
**Carol Judith Zazueta Rivera**
**Eva Margarita Moreno Chávez**

Revisión Técnica:
**Dr. Armando Flórez Arco**

**Servicios Editoriales Once Ríos**
Río Usumacinta 821 Col. Industrial Bravo. C.P. 80120
Culiacán, Sinaloa, México.

Impreso en México

*Edición con fines académicos, no lucrativos*

# ÍNDICE GENERAL:

# PRESENTACIÓN

La asignatura de **Cálculo I (Cálculo Diferencial)**, forma parte de los estudios de matemáticas del bachillerato de la UAS. Actualmente se estudia en el quinto semestre del tercer año del plan 2009.

La enseñanza y aprendizaje del **Cálculo I** (Cálculo Diferencial) se justifica en el bachillerato no sólo porque en él se presentan nuevos conocimientos y una forma específica de pensamiento matemático, en la que el estudiante se enfrenta a procesos dinámicos de aproximación infinitos relacionados con el paso al límite, sino que, también, a través de esta asignatura se profundizan, sistematizan e integran muchos de los contenidos estudiados anteriormente en los cursos de matemáticas I, II, III y IV. Por lo que esta asignatura, junto con el **Cálculo II** (Cálculo Integral), brinda posibilidades formativas excepcionales para el desarrollo de las competencias disciplinares de matemáticas de este nivel educativo.

Además, **esta asignatura es esencialmente propedéutica** en el sentido de que sirve de base para estudios profesionales en ingeniería, ciencias naturales y sociales, donde se imparten cursos superiores de matemáticas que formalizan su estudio y extienden sus aplicaciones en procesos reales. Por tanto, el Cálculo Diferencial resulta ser una poderosa herramienta de trabajo en manos de ingenieros y científicos ya que son innumerables los problemas que pueden ser resueltos con ella.

Considerando que el bachillerato universitario tiene carácter propedéutico, el contenido tratado en este texto es de nivel introductorio y elemental, y se desarrolla didácticamente de manera intuitiva e informal, enfatizando en aplicaciones sencillas. Así, pues, los autores hemos dejado, deliberadamente, para los niveles de licenciatura la formalización rigurosa, tan necesaria para la ciencia matemática pero difícil y carente de interés, en la mayoría de los casos, para los estudiantes de la preparatoria.

En congruencia con el programa de estudio correspondiente este texto está elaborado para que se trabaje con un enfoque por competencias lo cual implica que con su estudio el alumno deberá lograr, además de algunas competencias genéricas, un conjunto de competencias disciplinares básicas del campo de matemáticas. Las cuales buscan, además de formar a los estudiantes en la capacidad de interpretar matemáticamente el entorno que los rodea, propiciar el desarrollo de su creatividad, su pensamiento lógico

y crítico, la habilidad para plantear y resolver problemas, sus capacidades de comunicar, argumentar y estructurar mejor sus ideas y razonamientos. Bajo esta lógica del proceso de desarrollo de las competencias matemáticas, los contenidos de aprendizaje y enseñanza de **Cálculo I** están estructurados y secuenciados, de lo sencillo a lo complejo, en cuatro unidades de aprendizaje.

En la **primera unidad**, de **funciones: modelación**, **graficación y variación**, se activan y sistematizan los conocimientos que los alumnos han adquirido sobre los números reales y las funciones elementales. La atención se concentra en el dominio por parte del alumno de procedimientos algebraicos, de modelación, graficación y análisis de las funciones matemáticas elementales. En particular, se presta atención al análisis y determinación de dominios, imágenes, ceros, polos, monotonías, asíntotas, simetrías, inversas y otras propiedades de las funciones que requieren la aplicación de las habilidades de cálculo algebraico. Las operaciones con funciones se trabajan como sistematización de algo que los alumnos conocen y se introduce una operación nueva: la composición de funciones.

Sobre la base del concepto de variación funcional, en esta unidad se introducen intuitivamente dos nuevos conceptos básicos del cálculo, como son el de límite y continuidad de una función. La noción intuitiva de límite que se presenta en este curso introductorio, es básicamente un concepto auxiliar para introducir la derivación y, por tanto, lo fundamental aquí es preparar a los alumnos para comprender el concepto de derivada de una función y deducir las reglas de derivación. En lo que se refiere al concepto función continua, lo fundamental es que los alumnos lo comprendan y lo reconozcan geométricamente, y puedan reconocer que algunas de las funciones elementales son continuas en todos los puntos donde están definidas y lo que esto implica para el cálculo de límites.

En lo que se refiere al cálculo de límites, lo central es que los alumnos calculen los límites de las funciones mediante aproximaciones y de manera directa cuando sea posible, esto facilitará el desarrollo de las habilidades aritméticas y algebraicas de cálculo y fijar las propiedades fundamentales de las operaciones con límites. Se introducen, además, los llamados límites fundamentales: trigonométrico y algebraico. Al introducir el límite fundamental algebraico, se introduce el número **e** y se completa el estudio de las funciones elementales con la exponencial y la logarítmica de base **e**.

En la **segunda unidad** se estudian las **razones de cambio y el concepto de derivada.** El concepto derivada se relaciona con el concepto geométrico tangente para su interpretación geométrica, y con el concepto físico de velocidad instantánea para su interpretación física. Aquí es importante, para efecto de profundizar en la conceptualización, que se calculen derivadas de funciones sencillas a partir de la definición de derivada, así como de hallar ecuaciones de rectas tangentes y normales a una curva dada.

En la **tercera unidad** se estudian las **reglas, fórmulas y técnicas básicas de derivación**; aquí hay que tener en cuenta que se trata de un curso introductorio de Cálculo

Diferencial y, por esta razón, no se tratan de buscar teoremas fuertes, sino desarrollar las reglas que se aplican en los cálculos usuales. Es esencial que los alumnos dominen las reglas básicas de derivación y sean capaces de derivar las funciones algebraicas y trascendentes. Aquí se debe tener en cuenta que al calcular la derivada se debe tratar de expresar el resultado en la forma más simplificada posible, lo que conduce a la realización de cálculos algebraicos que contribuyen al mantenimiento de habilidades matemáticas fundamentales.

El curso termina, en la **cuarta unidad**, con **aplicaciones de las funciones y la derivada**. Como aplicaciones fundamentales de las derivadas, se determinan las ecuaciones de rectas tangente y normal a la gráfica de una función, y también se abordan el análisis y la graficación de funciones mediante la determinación de sus valores extremos (máximos y mínimos) y de los intervalos donde estas son crecientes y decrecientes, además, desde la perspectiva o interpretación física, se calculan velocidades instantáneas o razones instantáneas de cambio, por último, se estudian aplicaciones a la solución de problemas de extremos y/o de optimización.

Estas aplicaciones permiten, profundizar en la conceptualización matemática y en el mantenimiento de las habilidades de cálculo con números reales, funciones, inecuaciones, ecuaciones, etc. Además, contribuyen a desarrollar la capacidad para plantear y resolver problemas y contribuir a que los alumnos comprendan cómo la matemática permite modelar y resolver diferentes problemas prácticos de la vida cotidiana, las ciencias y la ingeniería.

**Resumiendo:** Con el estudio y aprendizaje del Cálculo Diferencial, el estudiante profundiza e integra funcionalmente sus conocimientos matemáticos previamente estudiados y, además, adquiere nuevos conocimientos, herramientas y habilidades para la formulación y resolución de problemas prácticos más complejos, lo que facilita y promueve el desarrollo de las competencias del área de matemáticas.

El Cálculo Diferencial es, pues, la oportunidad para que el alumno sistematice los estudios matemáticos elementales y continúe desarrollando las competencias disciplinares de matemáticas, a la vez que le abre la puerta de entrada para cursos superiores de matemáticas que les serán necesarios en una profesión futura.

Sugerimos a los profesores, y estudiantes, de Cálculo Diferencial del bachillerato, que usen este material como lo que es: ***un material didáctico de apoyo***. Ningún texto, por sí solo, resuelve los problemas que conlleva el proceso de enseñanza/aprendizaje del Cálculo Diferencial. Por lo cual, el maestro, considerando su circunstancia escolar y la diversidad de los estudiantes, deberá aplicar toda su experiencia y competencias docentes para el uso planificado, crítico y selectivo del texto, mientras que el estudiante deberá desarrollar, con disciplina y con la guía del profesor, el mayor esfuerzo para su comprensión.

Finalmente les deseamos respectivamente a los alumnos y profesores mucho éxito en el aprendizaje y enseñanza del Cálculo Diferencial y esperamos que este libro les ayude en esta empresa académica. Teniendo siempre presente que el aprendizaje significativo se logra cuando la bibliografía se transforma en biografía, y que el mejor camino para ello es la formulación y resolución de problemas matemáticos contextualizados.

Estimados lectores, aunque este texto fue revisado con sumo cuidado en su escritura y edición, en aras de facilitarles el aprendizaje y la enseñanza del Cálculo Diferencial, desgraciadamente siempre se presentan errores involuntarios, por lo cual les agradecemos de antemano que nos hagan llegar, a la Academia de Matemáticas de la DGEP-UAS (o la dirección electrónica ylemar@uas.edu.mx), todos los errores que detecten al momento de su lectura, así como sus críticas y sugerencias para mejorarlo conjuntamente con ustedes en futuras ediciones.

**ATENTAMENTE**

**Culiacán Rosales, Sinaloa, Agosto de 2012.**

***LOS AUTORES***



# DEDICATORIA Y AGRADECIMIENTOS

Dedicamos este libro a todos los estudiantes, maestras y maestros que hacen, y han hecho, el esfuerzo cotidiano por mejorar la calidad de la educación en general, y del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en particular, en las aulas universitarias. En especial a lo(a)s maestro(a)s de Cálculo Diferencial del bachillerato de la Universidad Autónoma de Sinaloa.

Y, particularmente, a nuestras familias, amigos y amigas, que nos brindan el marco afectivo y motivacional de apoyo tan necesario para continuar con nuestra difícil, pero grata, tarea docente.

Agradecemos también a los directivos de la Dirección General de Escuelas Preparatorias (DGEP) de la Universidad Autónoma de Sinaloa las facilidades para la elaboración y publicación de esta obra. En particular al Dr. Armando Flórez Arco por su paciente y experta revisión técnica del texto.

Esta edición del libro se ha realizado en los talleres gráficos de Once Ríos Editores, los lectores podrán apreciar la calidad del trabajo que evidencia su profesionalismo, lo que nos produce gran satisfacción, por tal motivo les expresamos nuestro reconocimiento y felicitación.



UNIDAD DE APRENDIZAJE I

# FUNCIONES MATEMÁTICAS: MODELACIÓN,GRAFICACIÓN Y VARIACIÓN

**Competencia de unidad:** Grafica y analiza las funciones, y las aplica en la modelación, formulación y resolución de problemas de su vida cotidiana, y de algunas áreas de las ingenierías y las ciencias.

## COMPETENCIAS DISCIPLINARES QUE PROMUEVE

En esta unidad de aprendizaje se contribuye de manera directa a desarrollar las siguientes competencias disciplinares del área de matemáticas:

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos y operaciones aritméticas, algebraicas y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

# CONTENIDO TEMÁTICO:

1.1 **Introducción.**

1.2 **Aseguramiento del nivel de partida y reactivación de matemáticas previas al Cálculo Diferencia (Opcional). Evalaución Diagnóstica:** Operaciones con expresiones algebraicas. Ecuaciones, desigualdades e inecuaciones. Razones y funciones trigonométricas. Relaciones y funciones. Lugares geométricos.

1.3 **¿Qué es el Cálculo Diferencial? Problemas fundamentales que resuelve**

1.4 **Funciones y modelación matemática:** La matemática como modelo del mundo. Historia, concepto, definición y notación de función. Evaluación y determinación del dominio, rango, imagen y ceros de las funciones. Funciones reales de variable real. Funciones numéricas. Análisis (propiedades y gráficas) de las funciones elementales. Operaciones con funciones. Función compuesta e inversa Clasificación de funciones: algebraicas y trascendentes. Funciones polinomiales. Funciones racionales e irracionales. Funciones trigonométricas.

1.5 **Variación, límites y continuidad de funciones:** Límites infinitos y en el infinito. Límite de una función en un punto: Concepto y definición. Unicidad del límite. Límites laterales. Propiedades de los límites. Cálculo de límites. Continuidad y discontinuidad de funciones. Continuidad de las funciones elementales. Interpretación geométrica de la continuidad. Propiedades de las funciones continuas. Límites de las funciones trigonométricas. Límites fundamentales trigonométricos. Funciones exponenciales. Funciones logaritmicas. Funciones exponencial y logaritmicas naturales.



# UNIDAD DE APRENDIZAJE I

# FUNCIONES: MODELACIÓN, GRAFICACIÓN Y VARIACIÓN

## *1.1 Introducción*

En este capítulo se reactivan, sistematizan y se profundizan los conocimientos sobre los números reales y las funciones elementales. La atención se concentra en los procedimientos algebraicos, y en la modelación, graficación, variación y en el análisis de las operaciones y propiedades básicas de las funciones. En particular, se presta atención al análisis y determinación de dominios, imágenes, inversas, ceros y otras propiedades de las funciones. También, en base al concepto de variación funcional, se introducen intuitivamente dos nuevos conceptos básicos del cálculo, como son el de **límite y continuidad de una función.**

La noción intuitiva de límite que se presenta en éste curso introductorio, es básicamente un concepto auxiliar para introducir la derivación y, por tanto, lo fundamental aquí es preparar a los alumnos para comprender el concepto de derivada de una función y deducir las reglas de derivación. En lo que se refiere al concepto **función continua**, lo fundamental es que los alumnos lo comprendan y lo reconozcan geométricamente, y lo que esto implica para el cálculo de límites.

Respecto al cálculo de límites, lo central es que los alumnos calculen algunos límites de funciones sencillas mediante aproximaciones y directamente lo que, a su vez, debe ser utilizado para continuar desarrollando las habilidades de cálculo y fijar las propiedades fundamentales de las operaciones con límites. Se introducen, además, los llamados límites fundamentales: trigonométrico y algebraico. Al introducir el límite fundamental algebraico, se introduce el número **e** y se completa el estudio de las funciones elementales con la exponencial y la logarítmica de base **e**.

## *1.2 Aseguramiento del nivel de partida y reactivación de matemáticas previas al Cálculo Diferencial (opcional). Evaluación diagnóstica.*

El estudio y aprendizaje significativo del Cálculo I (Cálculo Diferencial) requiere entre, otras cosas, de los conocimientos, habilidades y actitudes previamente adquiridos y desarrolladas principalmente en los cursos previos de Matemáticas I, II, III y IV del bachillerato.

En consecuencia el estudiante que inicia este curso debe saber: hacer operaciones básicas con los números reales y expresiones algebraicas, resolver ecuaciones e inecuaciones, reconocer y graficar las funciones elementales, reconocer y aplicar las razones e identidades trigonométricas y los lugares geométricos, analizar, graficar y aplicar la línea recta y las secciones cónicas.

En razón de lo anterior resulta conveniente adquirir y/o reactivar dichos conocimientos previos para tener altas probabilidades de éxito y de acreditación de esta asignatura. Estos conocimientos y habilidades deben quedar manifiestos al realizar los ejercicios y problemas de las actividades de aprendizaje de la siguiente evaluación diagnóstica.

## ***ACTIVIDADES DE REACTIVACIÓN (EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA):***



**Act-1)** Escribe, sin el símbolo de valor absoluto, el valor que representa la expresión:

a) $-(|-7|)^2 + |7| =$ b) $|-\pi + 3| =$ c) $\left[(-5)-|-5|\right]^2 =$ d) $\left(|-9| + \sqrt{(-1)^2}\right)^4 =$

e) $\left|52 - \frac{5279}{100}\right| =$ f) $\left|\frac{-5}{9} + \frac{3}{5}\right| =$ g) $\left|-\sqrt{3} - 2\right| =$ h) $\left|\frac{e - \pi}{\pi - e}\right| =$

**Act-2)** Verifica mediante cálculos aritméticos que para $a \in \Re$ y $b \in \Re$ es válida la desigualdad del triangulo: $|a + b| \leq |a| + |b|$

**Act-3)** En equipo colaborativo escribe los siguientes conjuntos en forma de intervalos, y haz su representación gráfica.

$\{x \in \Re \ / -7 < x < 6\} =$ $\{x \in Z \ / -7 < x < 6\} =$ $\{x \in \Re \ / -3 \leq x < 3\} =$

$\{y \in \Re \ / -\infty < y \leq 0\} =$ $\{w \in \Re \ / -10 \leq w \leq 100\} =$ $\{r \in \Re \ / \ r < 5\} =$

$\{t \in \Re \ / \ t > -2\} =$ $\{v \in \Re \ / \ v \leq -2\} =$ $\{u \in \Re \ / \ u \geq 1\} =$

**Act-4)** En equipo colaborativo determina el resultado, en forma de intervalos (analiticamente) y graficamente de las siguientes operaciones.

$(4,8)\cup(-3,6) =$ $(4,8)\cap(-3,6) =$ $(-\infty,-5)\cup(5,\infty) =$

$[3,10]\cap[9,12] =$ $(-2,2)^C =$ $(-\infty,+\infty)-[0.58, +\infty)$

$[\sqrt{2}, \pi]\cap(3,3.2) =$ $[\sqrt{2}, \pi]\cup(3 \ , \ 3.\ 2) =$ $\Re-[0,+\infty) =$

**Act-5)** Comunica y argumenta a tus compañeros por qué son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones:

$P_1$) Si $a < b$ y $c > 0$, entonces, $a \cdot c < b \cdot c$

$P_2$) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces, $a \cdot c > b \cdot c$

$P_3$) Si $a \in \Re$, $a \neq 0$, entonces, $a^0 = 1$

$P_4$) Si $a \in \Re$, entonces, $-a < 1$

$P_5$) Si $a$ y $b \in \Re$, entonces, $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

$P_6$) Si $a \in \Re$, $n \in N$, entonces, $-(a)^n = (-a)^n$

**Act-6)** Analiza las siguientes igualdades matemáticas y determina (o explica) por qué son erróneas en lo general, además escribe la igualdad correctamente:

a) $(x + y)^n = x^n + y^n$ b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{x + y}$

c) $\log(xy) = \log(x) \cdot \log(y)$ d) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha + \cos\beta$

**Act-7)** En equipo de 3 a 4 personas, realiza las siguientes operaciones aritméticas o algebraicas y simplifica lo más posible los resultados:

a) $\frac{8}{10}-(5-2)\left[\sqrt{100}-(12\div4)^2\right]-0.3+\sqrt{16}+\left(|-9|+\sqrt{(-1)^2}\right)^3-\left[(2+3^{1/2})\left(2-\sqrt{3}\right)\right]=$

b) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}=$

c) $\left(7^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{8}}+125^{2/3}-(\log_4 64-(\log 100)=$

d) Si $k=\sqrt{2}-5^{1/2}$, calcular el valor de $k^2$ y $8k^2$

e) $(y^2-5xy+x^2)(x-y)=$

f) $(2x-6)^2(x-2)(x+2)=$

g) $\frac{b^2+c^2-2bc}{b-c}$

h) $\frac{8+x^3}{x^2+2x+4}\div\frac{x^2-4}{x^3-8}=$

i) $\frac{5x-15}{5x-10}+\frac{x^2-x-2}{x^2-2x-3}-\frac{2}{2x^2-10x+12}=$

j) $\sqrt[3]{(a\sqrt{b})^6}=$

k) $\sqrt[6]{(a^2-2ab+b^2)^3}=$

l) $\left(x^{1/2}-x^{-1/2}\right)^2=$

m) $\left[(x+y)^{3/5}\right]^5=$

n) $\left(x+x^{1/2}\right)\left(x-\sqrt{x}\right)=$

o) $\left(2x^{1/2}+3+x^{-1/2}\right)\left(x-\sqrt{x}\right)=$

**Act-8)** Factoriza los siguientes polinomios, y verifica el resultado mediante la multiplicación algebraica y la sustitución (o evaluación) aritmetica:

a) $36x^4-9y^2=$

b) $6x^3+12x^2-4x=$

c) $10x^4 + 16x^2 - 8 =$

d) $x^3 + 12 - 4x - 3x^2 =$

**Act-9)** Escribe en que subconjuntos numéricos del conjunto de los números reales ($\Re$) se encuentran las raíces de las siguientes ecuaciones:

a) $2x + 7 = \frac{5x}{2} - 9$ b) $x - \sqrt{2} = 0$ c) $5x^2 - 3x = 0$ d) $x^2 + x - 6 = 0$

**Act-10)** Escribe una ecuación cuadrática cuyas raíces sean:

a) $x_1 = 5$ y $x_2 = -4$ ........................................................................

b) $x_1 = -1/3$ y $x_2 = 10$ ........................................................................

c) $x_1 = 6$ y $x_2 = 0$ ........................................................................

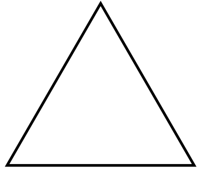
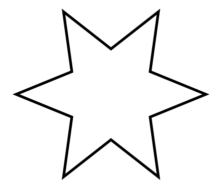
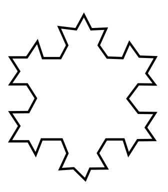
**Act-11)** El área de un triángulo rectángulo es $120\ \text{cm}^2$ y la hipotenusa mide $26\ \text{cm}$. ¿Cuáles son las longitudes de los catetos?

**Act-12)** Un propietario recibió \$138,000.00 por pago de renta de dos casas en un año, la renta mensual de una era \$1,000.00 más que la otra. ¿Cuál fue la renta mensual de cada una si la más barata estuvo desalquilada 3 meses?

**Act-13)** Escribe la definición de función matemática, y grafica 5 ejemplos en un plano cartesiano especificando su modelo analítico correspondiente.

**Act-14)** Determina el modelo matemático (relación o fórmula) que representa que "$y$" es directamente proporcional a "$x$" e inversamente proporcional al cuadrado de "$w$"

**Act-15)** Observa las siguientes figuras:

La primera tiene 3 lados, la segunda 12, la tercera 48. ¿Cuántos lados tendrá la siguiente figura en la serie? ¿Y la n-ésima?

**Act-16)** Un jardinero quiere cercar su jardín rectangular y cuenta con 250 metros de malla que va a usar totalmente. Determinar el área del jardín como una función de la longitud de uno de los lados del jardín.

**Act-17)** Un ciclista parte de una ciudad A hacia otra ciudad B y se desplaza a 60 km/hr. Un segundo ciclista parte de a 1.5 horas después con el mismo destino, y se desplaza a 75 km/hr. ¿Cuánto tardará el segundo ciclista en alcanzar al primero?

**Act-18)** Un avión que vuela a 900 metros de altura y 200 km/hr comienza a descender con velocidad constante hacia la pista, en una trayectoria recta que está a 7 grados debajo de la horizontal. ¿Cuánto se tardará el avión en tocar la pista de aterrizaje?

**Act-19)** Comunica y argumenta a tus compañeros por qué la suma de las medidas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es igual a 90 grados.

**Act-20)** Comunica y argumenta a tus compañeros por qué el valor del coseno y el seno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo siempre son menores que uno.

**Act-21)** A partir de la definición de las razones trigonométricas de un triangulo rectángulo demuestra la validez de las siguientes identidades trigonométricas:

a) $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ b) $\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$ c) $\cot^2\alpha + 1 = \csc^2\alpha$

**Act-22)** En base a la siguiente tabla que muestra la estatura promedio de los adolescentes con relación a su edad.

| Edad en años (t) | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Estatura promedio en cm (h) | 140 | 147 | 153 | 158 | 162 | 165 |

*Conteste las siguientes cuestiones:*

¿Cuánto cambia la estatura de los adolescentes de los 11 a los 12 años?

¿Cuánto cambia la estatura de los adolescentes de los 12 a los 13 años?

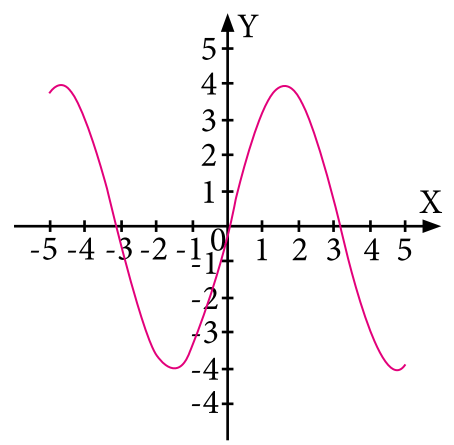
¿Cuánto cambia la estatura de los adolescentes de los 14 a los 16 años?

¿En qué par de edades consecutivas el cambio de estatura es mayor?

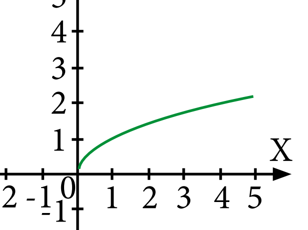
¿En qué par de edades consecutivas el cambio de estatura es menor?

¿El cambio de la estatura promedio por año es constante o variable?

**Act-23)** En base a la gráfica de la siguiente función $y = f(x)$, determina: (a) sus iterceptos con los ejes; (b) intervalos donde es creciente o decreciente; (c) el valor límite de la función cuando $x$ se acerca (o tiende) a $2$; (d) el valor límite de la función cuando $x$ se acerca (o tiende) a $-3$; (c) sus valores máximos y mínimos relativos.




**Act-24)** ¿Cuál es el modelo matemático (o la función) que mejor se ajusta o representa a la siguiente gráfica:



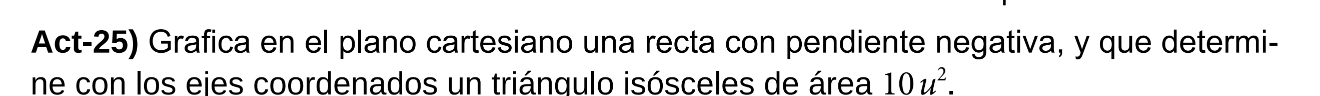

a) $f(x) = 3x^2$ ; para $x \geq 0$

b) $f(x) = e^x$ ; para $x \geq 0$

c) $f(x) = mx + b$; para $x \geq 0$

d) $f(x) = \sqrt{x}$ ; para $x \geq 0$

e) Ninguna de las anteriores



**Act-25)** Grafica en el plano cartesiano una recta con pendiente negativa, y que determine con los ejes coordenados un triángulo isósceles de área $10\,u^2$.

**Act-26)** Determina la pendiente, el ángulo de inclinación y la ecuación de la recta que pasa por los puntos:

a) $A(3\,,0)$ **y** $B(-2\,,-3)$

b) $C(2\,,-4)$ **y** $D(-5\,,6)$

c) $E(0\,,8)$ **y** $F(20\,,8)$

d) $G(-4\,,0)$ **y** $H(-4\,,-7)$

**Act-27)** Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-12\,,3)$ y que es perpendicular a la recta $-5x + y + 10 = 0$.

**Act-28)** Calcular la distancia mínima del punto $P(-2\,,8)$ a la recta cuya ecuación es $-5x + y + 6 = 0$.

**Act-29)** Determinar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 25 = 0$, y que pasa por el punto $P(-3,4)$.

**Act-30)** Determinar el cociente $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = ?$ para los siguientes casos:

a) Cuando: $f(x) = 5x + 6$
b) Cuando: $f(x) = 3x^2 + 5x + 6$
c) Cuando: $f(x) = \frac{5x + 6}{x + 3}$
d) Cuando: $f(x) = 5\sqrt{x}$

**Act-31)** De la siguiente función cuadrática: $f(x) = x^2 - 4x + 7$**.** Determine: (a) Su gráfica ; (b) las coordenadas de su vértice ; (c) Su valor mínimo.

**Act-32)** Representa la función cuadrática mediante: $y = 9x^2 - 6x + 1$ (a) una tabla de tabulación (b) un conjunto de pares ordenados (c) una gráfica en un plano cartesiano. Además, determina si tiene valores máximos o mínimos relativos, y los intervalos donde es creciente o decreciente.

**Act-33)** Un automóvil se desplaza sobre una autopista recta, de tal manera que en un intervalo de tiempo $\Delta t = 0.5$ horas se desplaza una distancia $\Delta s = 70$ kilómetros. (a) Calcular la velocidad promedio del recorrido. (b) ¿Con los datos anteriores se podrá calcular la velocidad instantánea del automóvil a los 16 minutos de su recorrido?

**Act-34)** En una caída libre la distancia (h) recorrida en metros por un cuerpo en función del tiempo (t) dado en segundos, está determinada por la función: $h(t) = 4.9t^2$. (a) Calcular la distancia recorrida a los 1, 2,3,4,…,10 segundos ; (b) Calcular la velocidad promedio entre los 3 y 4 segundos, entre los 6 y 7 segundos, y entre los 8 y 10 segundos ; (c) Calcular la velocidad instantánea a los 5 y 7 segundos.

**Act-35)** Determinar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$, en el punto $P(2,4)$ de su grafica.

**Act-36)** De un cartón rectangular de 40 por 50 centímetros por lado se hace una caja sin tapa, para esto se recortan cuadrados de igual tamaño en las esquinas del cartón y se doblan las cejas con el fin de formar la caja. ¿Qué dimensiones deberá tener la caja para obtener su volumen máximo?

## *1.3 ¿Qué es el Cálculo Diferencial? Problemas fundamentales que resuelve*

El Cálculo diferencial es una rama de las matemáticas que se inventó básicamente para resolver dos tipos de problemas estrechamente relacionados entre sí: el problema de las tangentes y el problema de la velocidad instantánea.

***El problema de las tangentes:*** *consiste en trazar una recta tangente (o determinar la ecuación de una recta tangente) a una curva dada en un punto especifico de ella.*

En el curso de Matemáticas IV (Geometría Analítica) se estableció que para determinar la ecuación de una recta se necesitan dos condiciones dadas que pueden ser: dos puntos de la recta, o un punto y su pendiente, o un punto y su ángulo de inclinación.

**Por ejemplo,** la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(3,0)$ y $B(-2,-3)$ es:

**Resolución:** Primero calculamos su pendiente, $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{(-3)-(0)}{(-2)-(3)}=\dfrac{-3}{-5}=\dfrac{3}{5}$

después sustituimos en la ecuación de la recta de la forma punto-pendiente para obtener dicha ecuación

$$y_2-y_1=m(x-x_1) \quad \Rightarrow \quad y-0=\frac{3}{5}(x-3) \quad \Rightarrow 3x-5y-9=0$$

Hasta aquí no se detecta ningún problema con los cálculos, sin embargo, nótese que en el problema de la tangente se pide la ecuación de la recta tangente cuando solo se conoce la curva y un punto de ella.

En el caso de que la curva sea una circunferencia el problema de la tangente aun es relativamente fácil de resolver analíticamente si se conoce su ecuación y el punto de tangencia (Ver act-29), y hasta se puede dar la siguiente definición: *la recta tangente a una circunferencia es aquella que pasa por dicho punto y que sólo toca a la curva en dicho punto. Esta definición, como ya estudiaste en Matemáticas III, permite trazar fácilmente la recta tangente a un círculo (Ver figura 1.1a), pero tiene el inconveniente de que en general no es aplicable a otras curvas diferentes a la circunferencia (Ver figura 1.1b)*

Figura 1.1a

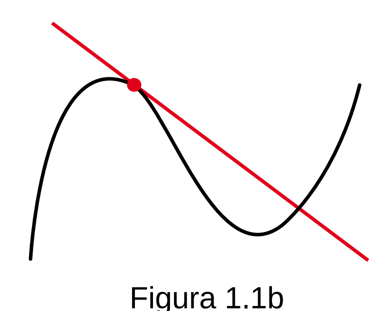
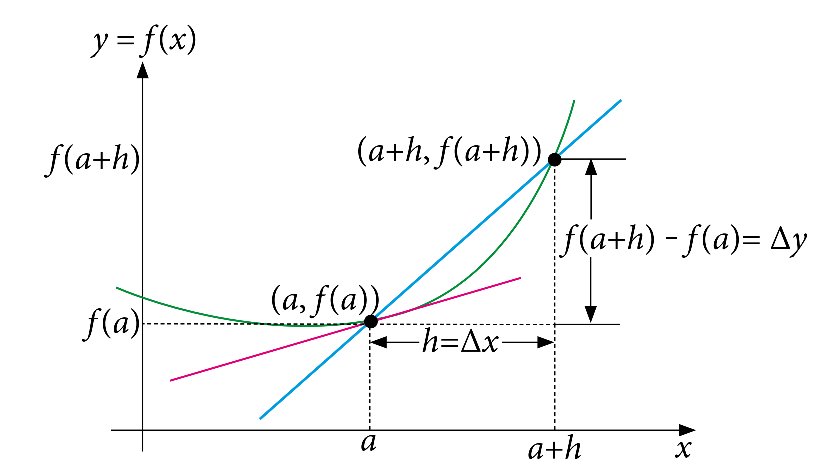


Figura 1.1b

Para resolver el problema de las tangentes para cualesquier curva $y=f(x)$ se necesita de un método general más poderoso (atribuido a Pierre de Femat), y está esbozado geométricamente y analíticamente en la siguiente gráfica de la derecha:



De la cual se observa que la pendiente de la recta tangente $(m_t)$ a $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ puede ser determinada, de manera aproximada, a través de la pendiente de la recta secante $(m_s)$ a la curva que pasa por los puntos $P(a, f(a))$ y $P(a+h, f(a+h))$ considerando que el incremento $h\ (=\Delta x)$ es cada vez más pequeño hasta tender a cero $h \to 0\ (=\Delta x \to 0)$.

Para ilustrar este método se resuelve a continuación la Act-35 que consiste en determinar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$, en el punto $P(2, 4)$ de su grafica. **Nota:** Completa los cálculos de la tabla y con ayuda de tu maestro(a) y compañeros interpreta geométricamente dichos cálculos.

| Valor del incremento: $h\ (=\Delta x)$ | Valor de la pendiente de la recta secante: $m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = 2x + h$ | Valor de la pendiente de la recta tangente en el punto $P(2,4)$: $m_t =$ |
|---|---|---|
| $h = 1(=\Delta x)$ | $m_s = 2(2)+1=5$ | Ecuación de la recta tangente: |
| $h = 0.5(=\Delta x)$ | | |
| $h = 0.3(=\Delta x)$ | | |
| $h = 0.1(=\Delta x)$ | | |
| $h = 0.001(=\Delta x)$ | | |
| $h = 0(=\Delta x)$ | $m_s = m_t = ?$ | |

***El problema de la velocidad instantánea*** $(\dot{v})$***:*** *consiste en determinar la velocidad con que se desplaza un móvil en un instante de tiempo dado.*





Cuando el móvil se desplaza a velocidad constante es evidente que la velocidad en cualquier instante de su recorrido es la misma. Sin embargo, si la velocidad esta variando durante su trayectoria o en función del tiempo, determinar la velocidad en un instante dado resulta mucho más complicado, pero curiosamente puede ser resuelto de manera similar al problema de las tangentes tal como se muestra a continuación.

Pero antes hay que recordar que si un automóvil se desplaza sobre una autopista recta, de tal manera que en un intervalo de tiempo $\Delta t = 0.5$ horas se desplaza una distancia $\Delta s = 70$ kilómetros. Entonces su velocidad promedio de su recorrido total está dada por:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{70\ km}{0.5\ hr} = 140\ km/hr$$

***Pregunta:*** Con los datos anteriores ¿se podrá calcular la velocidad instantánea del automóvil a los 16 minutos de su recorrido?

Analicemos ahora el movimiento de un cuerpo en una caída libre donde la distancia (h) recorrida en metros en función del tiempo (t) dado en segundos, está determinada por la función: $h(t)=4.9t^2$. En la siguiente tabla se muestra algunos cálculos que pueden realizarse con estos datos:

| Tiempo t dado en segundos | Distancia recorrida en un tiempo t dado en segundos | Valor de la velocidad media en el intervalo de tiempo: $\bar{v} = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(t+\Delta t)-h(t)}{\Delta t} = \frac{4.9(t+\Delta t)^2-4.9t^2}{\Delta t}$ $= \frac{4.9t^2 + 9.8t\,\Delta t + 4.9\Delta t^2 - 4.9t^2}{\Delta t} = 9.8t + 4.9\,\Delta t$ |
|---|---|---|
| $t = 5.7$ | $h(5.7) = 4.9(5.7)^2 = 159.201m$ | $\bar{v} = 9.8(5.7) + 4.9(0.2) = 56.84\ m/seg$ |
| $t = 5.9$ | $h(5.9) = 4.9(5.9)^2 = 170.579m$ | |
| $t = 6$ | $h(6) = 4.9(6)^2 = 176.4m$ | $\bar{v} = 9.8(6) + 4.9(0.01) = 58.849\ m/seg$ |
| $t = 6.01$ | $h(6.01) = 4.9(6.01)^2 = 176.9885m$ | |

En base a las ideas del método de Pierre de Fermat y al análisis de los cálculos realizados en la tabla anterior, y considerando que la velocidad instantánea para un tiempo dado puede ser considerada aproximadamente igual a la velocidad media para un intervalo de tiempo infinitamente pequeño ($\Delta t \approx 0$) resulta que la velocidad instantánea del cuerpo exactamente a los 5.7 y 6 segundos está definida por:

$$\dot{v}\,(5.7) = 9.8(5.7) + 4.9(0) = 55.86\ m/seg$$

$$\dot{v}\,(6) = 9.8(6) + 4.9(0) = 58.8\ m/seg$$

**En resumen:** se observa que la pendiente de una recta secante a una curva $y = f(x)$ que pasa por los puntos $P(a, f(a))$ y $P(a+h, f(a+h))$ de dicha curva, es una buena aproximación a la pendiente de la recta tangente de tal curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ de su grafica, con la condición de que el incremento $h\ (=\Delta x)$ tienda a cero $h \to 0\ (=\Delta x \to 0)$ .Estas ideas se representan y operacionalizan mediante la siguiente expresión matemática:

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} m_s = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Donde:
El símbolo $\lim_{\Delta x \to 0}$ representa el ***límite (o valor) del cociente*** $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ cuando el incremento $h\ (=\Delta x)$ es infinitamente pequeño, y que para fines prácticos se toma como igual a cero $h \to 0\ (=\Delta x \to 0)$.

Además, si en la expresión anterior hacemos los cambios de variable:

$$x = t \quad ; \qquad \Delta x = \Delta t \ ; \qquad f(x) = s(t)$$

Entonces se obtiene la expresión matemática que permite calcular la velocidad instantánea en un tiempo t de un móvil que se desplaza con velocidad variable según la función de movimiento $s = s(t)$:

$$\dot{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

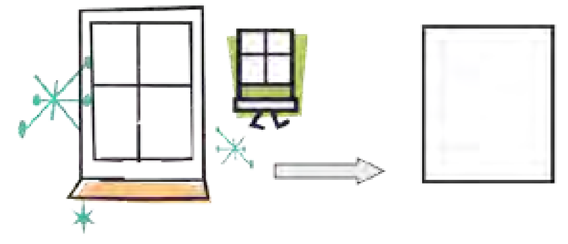
***<u>ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE:</u>*** 

**Act-37)** Aplicando la ideas del metodo de Pierre de Fermat calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^3 + 1$ en el punto $P(-2, f(-2))$ de su gráfica.

**Act-38)** Aplicando la ideas del metodo de Pierre de Fermat calcula la velocidad instantanea, a los 3 y 7 segundos, de una flecha que se lanza verticalmente hacia arriba y cuya función de desplazamiento (en metros) esta dada $s(t) = -4.9t^2 + 60t$.

## *1.4 Funciones y modelación matemática*

Desde grados anteriores has aprendido que la Matemática se utiliza para representar el mundo, es decir, como un modelo idealizado del mundo que nos rodea. Así, en el curso anterior al estudiar la Geometría, pudiste ver que las figuras geométricas eran modelos abstractos de la forma de los objetos de la realidad: en el mundo real no hay rectángulos pero, por ejemplo, **el rectángulo es un modelo ideal de la forma de algunas ventanas.**



En particular en el curso de Matemáticas II en el tema de las funciones lineales y cuadráticas comenzaste el estudio de uno de los modelos matemáticos de mayor utilidad: **las funciones matemáticas**.

**Historia, concepto y definición de función**

Aunque desde la época de la formación de los conceptos matemáticos hay antecedentes de la idea de función, el mismo se desarrolla completamente en el período histórico de las matemáticas de las magnitudes variables.

En efecto, es en este período alrededor del siglo XVI cuando comienzan a **modelarse matemáticamente el movimiento y los fenómenos de variación y cambio**, por ejemplo el movimiento de un cuerpo o el llenado de un tanque, pues hasta entonces los que se estudiaban eran estáticos, o sea sin movimiento. Para este tipo de fenómenos de variación y cambio es que hacen falta las **funciones**, o sea, el modelo funcional.

**Gottfried Wilhelm Leibniz (Alemania, 1646 a 1716)**



No es hasta el siglo XVII que se culmina el proceso de formación del concepto de función. En ese proceso jugó un papel muy importante Leibnitz, matemático, filósofo, historiador, jurista, diplomático y teólogo alemán que introdujo dicho concepto para designar a ciertas magnitudes geométricas asociadas a las **curvas** que eran el principal objeto de estudio de las matemáticas en esa época.



Siguiendo esta breve información histórica sobre el surgimiento y desarrollo del concepto de función, no es hasta el siglo XVIII que **Euler**, matemático suizo muy destacado, perfecciona el concepto de función pero tampoco lo expresa como se hace en la actualidad.

**Leonhard Euler. (Suiza, 1707 a 1783)**



No es hasta el siglo XIX que se culmina la evolución del concepto de función, mérito que le corresponde al matemático alemán **Dirichlet** el que en 1837 expresó la definición de función usada comúnmente en la actualidad en el cálculo elemental, muy parecida a como la estudiaste en el curso de matemáticas II.

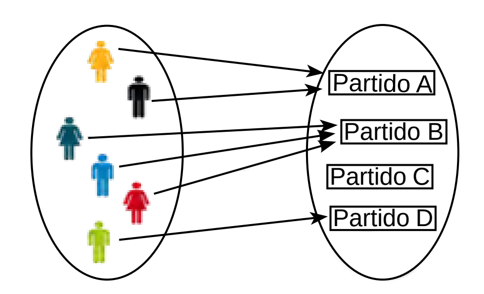


**Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet**
(Alemania, 1805 a 1859)

***El concepto de función***

Desde el curso de Matemáticas II conoces el concepto siguiente de función:

**Una función *f* de un conjunto A en un conjunto B es una correspondencia que a cada elemento de A le asigna un único elemento de B.**




Como se observa en el diagrama de la izquierda este concepto corresponde a un modelo matemático muy general que permite modelar situaciones de naturaleza muy diferentes.

**Ejemplo 1**: El RFC es una correspondencia que a cada persona asigna un valor alfanumérico[1]. Si Alfredo Fernández González nació el 5 de Octubre de 1991, su RFC es FEGA911005. Fundamenta que es una función.

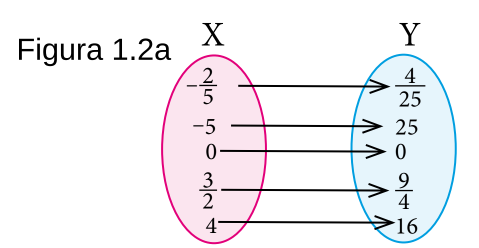
**Resolución:** Esta correspondencia es una función pues a cada persona corresponde un único RFC. En este Caso el nombre, *f*, de la función es RFC:

RFC(Alfredo Fernández González)= FEGA911005

Observa que si Alberto Ferrer García nació el 5 de Octubre de 1991 su RFC es también FEGA911005. Esto no impide que el RFC sea una función.

Sin embargo, estamos particularmente interesados en funciones numéricas donde los elementos de los conjuntos **A (dominio)** y **B (contradominio)** de la definición anterior son números reales tal como se muestra en la figura 1.2a.

Figura 1.2a



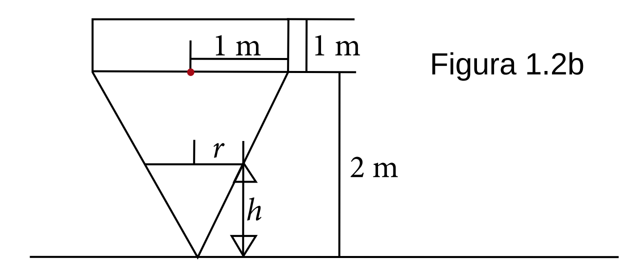




Figura 1.2b

**Ejemplo 2:** Un tinaco tiene forma de un cono invertido unido con un cilindro. En la figura 1.2b se muestra una sección del tinaco con sus dimensiones. Expresa el volumen en función de la altura.

**Resolución:** El volumen de agua en el tinaco depende de la altura que alcanza, a cada valor de la altura corresponde un valor del volumen. El volumen es función de la altura. Cuando la altura del agua es inferior a la altura del cono, se trata de calcular el

[1] El término alfanúmerico que usa en el lenguaje computacional para referirse a símbolos que son números, letras o una combinación de ambos.

volumen de un cono de agua de radio ***r*** y altura ***h.*** De la semejanza de los triángulos rectángulos se concluye que $\frac{r}{1}=\frac{h}{2} \Rightarrow r=\frac{h}{2}$ y el volumen es:

$$v=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{h}{2}\right)^2\cdot h=\frac{\pi h^3}{12}$$

Cuando el agua llena el cono, es decir, ***h*** > 2, entonces se trata del volumen de un cono de radio 1 y altura 2 sumado con el volumen de un cilindro de radio 1 y altura ***h*** – 2:

$$v=\frac{1}{3}\pi\cdot 2+\pi\cdot(h-2)=\left(h-\frac{4}{3}\right)\cdot\pi$$

Es decir, la relación que define la función tiene dos expresiones diferentes según la altura sea menor o mayor que 2 (siempre menor que 3). Esto se expresa simbólicamente como:

$$v(x)=\begin{cases}\frac{\pi h^3}{12} & 0\le h\le 2\\ \left(h-\frac{4}{3}\right)\cdot\pi & 2\le h\le 3\end{cases}$$

En este caso el nombre de la función es **v** .

**Ejemplo 3:** El conjunto de pares ordenados de la forma $P(x, x^3-6x^2+8x)$ definen la función polinomial $y=x^3-6x^2+8x$ cuya gráfica se muestra abajo en la figura 2. En este caso tanto **A** como **B** corresponden al conjunto de los números reales.

| Tabulación y gráfica de función polinomial: $y=x^3-6x^2+8x$ | | |
|---|---|---|
| Valores de la variable independiente: $x$ | Valores correspondientes de la variable dependiente: $y$ | Puntos $P(x,y)$ de la gráfica: $y=x^3-6x^2+8x$ |
| $x=-10$ | $y=$ | |
| $x=-5$ | $y=$ | |
| $x=0$ | $y=0$ | $P(x,y)=P(0,0)$ |
| $x=2$ | $y=$ | |
| $x=10$ | $y=$ | |

Como vemos toda función está constituida por pares ordenados y se puede también definir el concepto en la forma equivalente:

**Una función de A en B es un conjunto de pares ordenados (x,y) con** $x \in A$, $y \in B$**, donde cada** $x \in A$ **aparece al menos en un par y estas primeras componentes no se repite, es decir:** $(x_1, y), (x_2, y) \in f \Rightarrow x_1 = x_2$ **.**

**Ejemplo 4:** ¿Cuáles de las siguientes correspondencias son funciones? La correspondencia que

a) a cada persona hace corresponder su madre biológica.
b) a cada madre biológica le hace corresponder su hijo.
c) a cada número natural del 1 al 20 le hace corresponder su cuadrado.
d) a cada elemento del conjunto A= $\{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$ le hace corresponder su raíz cuadrada.

**Resolución:**

a) Se trata de una función pues cada persona tiene una única madre biológica.
b) No es función, pues una madre puede tener más de un hijo.
c) Si es una función, pues a cada número natural le corresponde un único cuadrado.
d) No es una función, pues a cada número del conjunto A le conrresponde dos números, por ejemplo a 4 le corresponden $-2$ y $2$, ya que $(-2)^2 = (2)^2 = 4$.

De lo que hemos visto en los ejemplos podemos concluir que una función puede definirse por diferentes procedimientos: **mediante una fórmula, mediante un gráfico o mediante una tabla.**

En resumen: para definir una función partimos de elementos de un cierto conjunto, y establecemos una correspondencia o relación con elementos de otro conjunto. El primer conjunto es el conjunto de partida y el segundo el conjunto de llegada. Estos conjuntos sólo sirven para determinar la naturaleza de los elementos entre los que se establece la correspondencia; para que la función quede definida es necesario precisar para cuáles elementos del conjunto de partida se puede establecer la correspondencia, estos elementos forman el ***dominio de la función***. Los elementos del conjunto de llegada que se hacen corresponder a los elementos del dominio forman el ***conjunto (la) imagen de la función.***

**Para definir una función hay que precisar el dominio.** Así en el **ejemplo 1** el conjunto de partida es el conjunto de los seres humanos y el conjunto de llegada es el conjunto de las expresiones alfanuméricas. La función está definida para los mexicanos, luego el dominio es el conjunto de los ciudadanos mexicanos y la imagen es el conjunto de las expresiones alfanuméricas que se obtienen realmente.

En el **ejemplo 2** el conjunto de partida es el conjunto de alturas (cantidades de longitud) y el conjunto de llegada es el conjunto de los volúmenes (cantidades de volumen).

La función está definida para las alturas dentro del tinaco ($h \leq 3\text{m}$), luego el dominio es el conjunto de las longitudes de 0 a 3 metros y la imagen es el conjunto de los volúmenes de 0 a $\frac{5}{3}\pi m^3$.

En el **ejemplo 3** tanto el conjunto de partida como el conjunto de llegada es el de los números reales. La función está definida para todo número real, luego el dominio es el conjunto $\Re$ y la imagen es el conjunto de las ordenadas de todos los puntos de su grafica.

Es usual que los elementos del dominio se representen por una variable que se denomina variable independiente y los de la imagen por otra variable que recibe el nombre de variable dependiente. Así en el ejemplo 2 la variable independiente se denota por $h$ y la dependiente por $v$. En el ejemplo 3 la variable independiente se denota por "$x$" y la dependiente por "$y$".

También se acostumbra utilizar letras como y, z, w, etc. para la variable dependiente y otras como $x$, t, s, etc. para la variable independiente. Así es usual encontrar expresiones como las siguientes $y = f(x)$ ; $z = g(t)$ ; $w = h(s)$ ; $z = f(t)$ en las que las letras $f, g, h$ representan las variables para el nombre de la función.

***ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE:***



**Act-39)** Analiza si las siguientes correspondencias son funciones. La correspondencia que a cada:

a) Longitud corresponde el área del cuadrado que tiene sus lados de esa longitud.
b) país le hace corresponder su superficie.
c) Longitud corresponde el volumen del cubo que tiene esa arista.

**Act-40)** Un vendedor de una empresa tiene un sueldo base semanal de n pesos y por cada artículo vendido recibe una comision de m pesos. Determina la función que permite calcular el salario ($y$) semanal del vendedor cuando vende $x$ articulos por semana.

**Act-41)** Una cierta pizzería vende pizzas de 36 pulgadas de diámetro y otra las vende de 18 pulgadas de diámetro pero ofrece dos por el precio de una de 36 pulgadas.

a) Determina la función que a cada pizzería hace corresponder el área de la pizza que oferta por el precio dado. b) ¿Cuál pizzería tiene la mejor oferta?

**Act-42)** Un tinaco tiene forma de un cilindro de 2 m de diámetro 3 m de altura. Determina la función que a cada altura hace corresponder el volumen de agua acumulada.

**Act-43)** Escribe la fórmula que define a las funciones siguientes:

a) El área de la circunferencia como una función de su diámetro.
b) El radio de una esfera como una función de su volumen.

**Act-44)** Una cierta variedad de conejos comienza a parir al final del tercer mes y cada dos meses produce una pareja (hembra y macho). Si se comienza con una pareja recién nacida ¿Cuántas parejas se tendrá después de 6, 12 y 15 meses? Determina y grafica la función matematica que te permite resolver el problema.

***Funciones reales de variable real.***

Las funciones que estudiaremos en este curso están definidas en el conjunto de los números reales y tienen como conjunto de llegada ese mismo conjunto; estas funciones se conocen como funciones reales de variable real. En el caso de estas funciones la descripción usual es por medio de la ecuación que relaciona la variable independiente y la dependiente (fórmula que define la función), tal como se muestra a continuación.

**Ejemplo 5: Las funciones lineales** que estudiaste en primer grado son funciones reales de variable real, por ejemplo la función que a cada número real $x$ asocia $3x + 2$, es una función numérica; esta función se representa brevemente por $f(x) = 3x + 2$. El dominio de estas funciones es todo el conjunto de los números reales.

**Ejemplo 6: Las funciones cuadráticas** también son funciones numéricas, por ejemplo, $f(x) = x^2 - 5$. De nuevo el dominio es todo el conjunto de los números reales.

**Ejemplo 7: La función tangente** que conoces desde el segundo grado es también una función real de variable real:

$$y = \tan(x) \quad , \quad x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\,;\, k \in \mathbb{Z}$$

En este caso se limita el dominio pues la tangente no está definida en los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$.

A las funciones reales de variable real se les conoce también como funciones numéricas; estas funciones en principio no quedan definidas al dar solo la ecuación, es necesario precisar el dominio, tal como se muestra en la siguiente función.

**Ejemplo 8: La ecuación $y = \sqrt{x}$ define funciones diferentes en diferentes dominios:**

a) Si el dominio son los números naturales cuadrados perfectos, su imagen es el conjunto de los números naturales, es la función que a cada cuadrado perfecto asocia su raíz no negativa.

b) Si el dominio son los números naturales, su imagen está formada por números reales aislados que son raíces de números naturales.

c) Si el dominio son los reales no negativos, su imagen son los reales no negativos.

En este ejemplo vemos que para que dos funciones sean iguales tienen que coincidir los dominios y la correspondencia; de todos los dominios hay uno que es mayor que todos los demás, en este caso el conjunto de los reales no negativos, si asumimos que en cada caso la ecuación define la función en el dominio más amplio posible, no tenemos necesidad de precisar el dominio en cada caso. Por esta razón asumimos el siguiente convenio:

**Una función numérica definida mediante una ecuación tiene como dominio el subconjunto más amplio de los números reales en el que tiene sentido la ecuación que la define.**

**Ejemplo 9:** ¿Cuáles son los dominios de las funciones: **a)** $y=\sqrt{x}$ **b)** $y=x^2$ **c)** $y=\frac{1}{x}$ **?**

**Resolución:**

a) La función definida por la ecuación $y=\sqrt{x}$ tiene como dominio $\Re^+$ pues sólo se puede extraer raíz cuadrada a los números no negativos.

b) La función definida por la ecuación $y=x^2$ tiene como dominio $\Re$ pues para cualquier número real se puede calcular su cuadrado.

c) La función definida por la ecuación $y=\frac{1}{x}$ tiene como dominio $\Re-\{0\}$ pues el denominador de una fracción no puede ser cero.

Para las funciones numéricas, los pares ordenados que las forman son pares ordenados de números reales y pueden ser representados en un sistema de coordenadas cartesianas. En este caso los puntos determinados forman una figura que es la gráfica de la función.

**Ejemplo 10:** Mediante el método de evaluación y de tabulación verifica que la representación gráfica de las funciones a) $y=\sqrt{x}$, b) $y=x^2$ , es la que muestra a continuación.

**Resolución:**

a) Determinando algunos pares ordenados se concluye que la grafica de $y=\sqrt{x}$ es la representada en la figura 1.3.

b) Determinando algunos pares ordenados se concluye que la grafica de $y=x^2$ es la representada en la figura 1.4.

En la mayoría de los casos se presenta una porción del gráfico. Al trazar un gráfico una habilidad importante es la selección del rango adecuado para tener una representación que permita formarse una idea correcta de la función.

Según hemos dicho, en una función numérica el dominio y la imagen se determinan manipulando la ecuación de la función para ver cuál es el conjunto más amplio en el que está definida y cuál es el subconjunto de los números reales que cubren los valores de la imagen. No obstante a partir del significado que tienen estos conceptos, es posible apoyarse en la representación gráfica para su determinación.

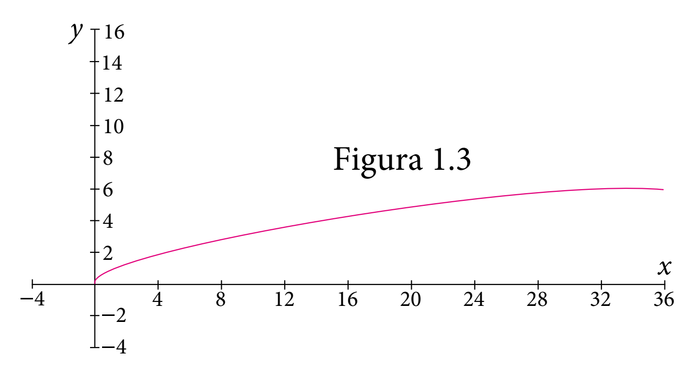



Figura 1.3

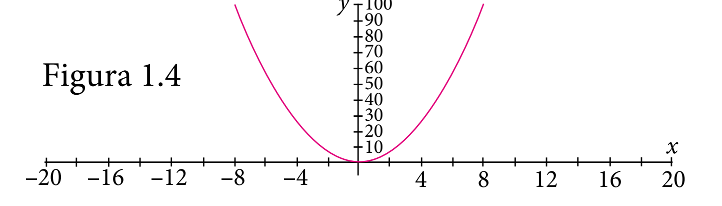



Figura 1.4

**Ejemplo 11:** Apoyándote en algún recurso electrónico digital (como una calculadora que grafique o en un software de computación) construye la gráfica y determina el dominio y la imagen de las siguientes funciones.

$a)\ y = \frac{1}{x-3}$ $\qquad$ $b)\ y = \frac{x^2-16}{x^2-7x+12}$

**Resolución:**

a) Escribimos $\frac{1}{x-3}$ en la línea de entrada y obtenemos un gráfico como el de la figura 1.5 que es el gráfico de $y=\frac{1}{x}$ desplazado tres unidades a la derecha.

El significado gráfico del dominio es la proyección del gráfico sobre el eje "X", en este caso al parecer es todo el eje menos un punto que parece ser 3 igualmente la significación gráfica de la imagen es la proyección sobre el eje "Y", en este caso también parece ser todo el eje menos un punto, en este caso 0, visualizamos que la imagen es el conjunto $\Re - \{0\}$.

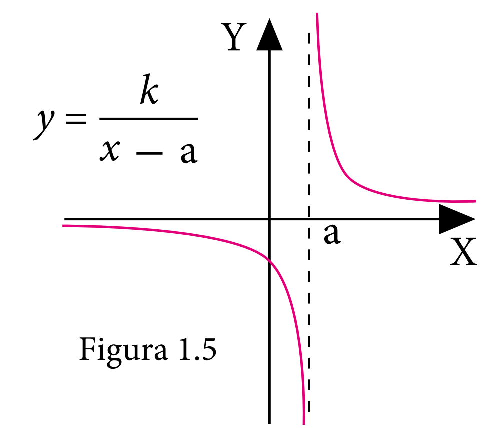


Figura 1.5

Estas inferencias realizadas a partir del gráfico son muy útiles para visualizar la función pero pueden y deben ser comprobadas por métodos analíticos.

El dominio es el subconjunto más amplio en el que tiene sentido la ecuación que la define, en este caso se trata de una fracción, sólo deja de estar definida cuando el denominador se anula, es decir cuando $x-3=0$ o sea $x=3$. Por tanto el dominio es el conjunto: $\{x \in \Re : x \neq 3\} = \Re - \{3\}$.

También cuando se trata de la imagen podemos comprobarlo mediante manipulaciones algebraicas, en este caso despejamos $x$ (variable independiente) en términos de y (variable dependiente) y analizamos para cuáles valores de y está definida la $x$:

$$y = \frac{1}{x-3} \Rightarrow (x-3)\cdot y = 1\ ;\ \text{con } x \neq 3$$

$$\Rightarrow xy = 3y + 1 \Rightarrow x = \frac{3y+1}{y}$$

expresión que no está definida sólo para $y=0$, es decir, la imagen es $\Re - \{0\}$ como habíamos supuesto.

b) Escribimos $\dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 7x + 12}$ en la línea de entrada y obtenemos un gráfico como el de la figura 1.6.

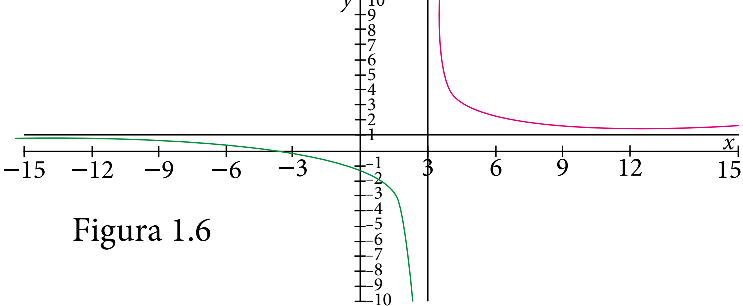


Figura 1.6

En este caso la proyección sobre el eje “X” lo cubre totalmente excepto el punto $x$=3, al igual que en el inciso anterior la gráfica se acerca a la recta $x$=3 pero no llega a tocarla, esta recta es una “asíntota vertical”. Para la imagen podemos ver que la proyección cubre todo el eje “Y” excepto un punto que con la función traza inferimos que es $y$=1. En este caso al igual que con el eje “X” en el inciso anterior la gráfica se pega a la recta $y$=1 sin llegar a tocarla, se trata de una “asíntota horizontal”.

También aquí comprobamos las inferencias con manipulaciones algebraicas, para precisar los puntos adonde se indefine la función comenzamos por descomponer en factores numerador y denominador:

$$\frac{x^2 - 16}{x^2 - 7x + 12} = \frac{(x-4)\,(x+4)}{(x-4)\,(x-3)} = \frac{x+4}{x-3}$$

En esta expresión vemos que la ecuación que define la función se indefine en los ceros del denominador que son $x$=3 y $x$=4. ¿A qué se debe la discrepancia?

El problema radica en que el procesador grafica la expresión simplificada y en este caso eso elimina un cero del denominador ($x$=4), esto muestra que no se debe confiar ciegamente en la imagen del procesador, es una guía muy buena pero puede introducir errores. Concluimos entonces que el dominio es el conjunto de los reales excepto el 3 y el 4, es decir $\Re - \{3,4\}$.

Para la imagen de nuevo despejamos, en este caso partimos de la expresión simplificada pero teniendo en cuenta que $x \neq 4$ y, por tanto, $y \neq 8$.

$$y = \frac{x+4}{x-3} \Rightarrow xy - 3y = x + 4$$

$$x(y-1) = 3y + 4 \Rightarrow x = \frac{3y+4}{y-1}$$

expresión que sólo se indefine para y=1. Como todas las transformaciones realizadas son equivalentes en el dominio de la función ($x \neq 3$) la función puede tomar todos los valores, pero como por condición $x$ no puede ser 4 y, por tanto, y no puede ser 8 tenemos que la imagen es: $\Re - \{1,8\}$.

***Resumen***

Para analizar el dominio de una función es conveniente representarla gráficamente en un procesador matemático, la proyección del gráfico sobre el eje "X" es una primera aproximación al dominio. Con esta orientación se procede a comprobar analíticamente que esos son los únicos puntos en los que no se indefine la expresión que representa la ecuación de la función.

Para analizar la imagen es también conveniente partir de su representación gráfica en un procesador y analizar la proyección, en este caso sobre el eje "Y". Esa proyección es la primera aproximación a la imagen. Para la verificación con recursos algebraicos se expresa $x$ en términos de $y$, una vez obtenida la expresión se analiza que los puntos obtenidos son los únicos para los que no se indefine la expresión y que corresponden a elementos del dominio.

***ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE:***



**Act-45)** La figura 1.7 representa la gráfica de la función $y = f(x)$

a) Determina los valores $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$. Si la gráfica representa toda la función determina su dominio y su imagen.

b) Localiza y escribe 8 pares ordenados de su gráfica.

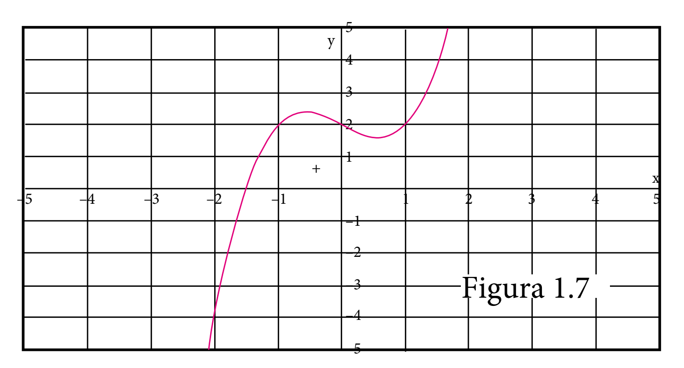
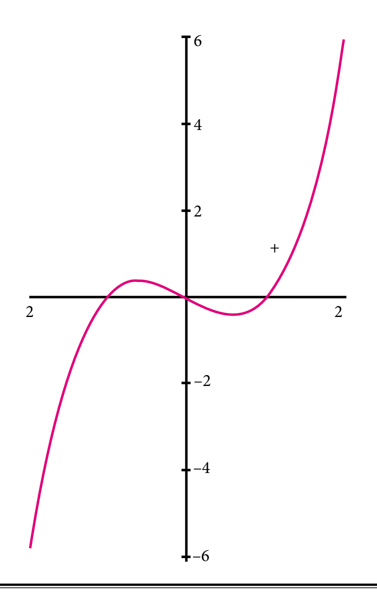
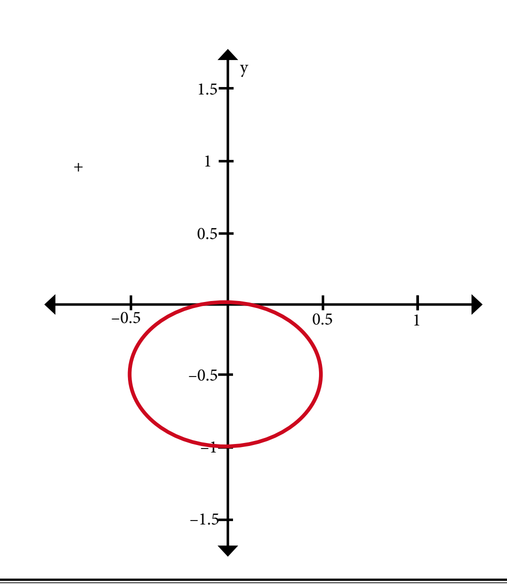
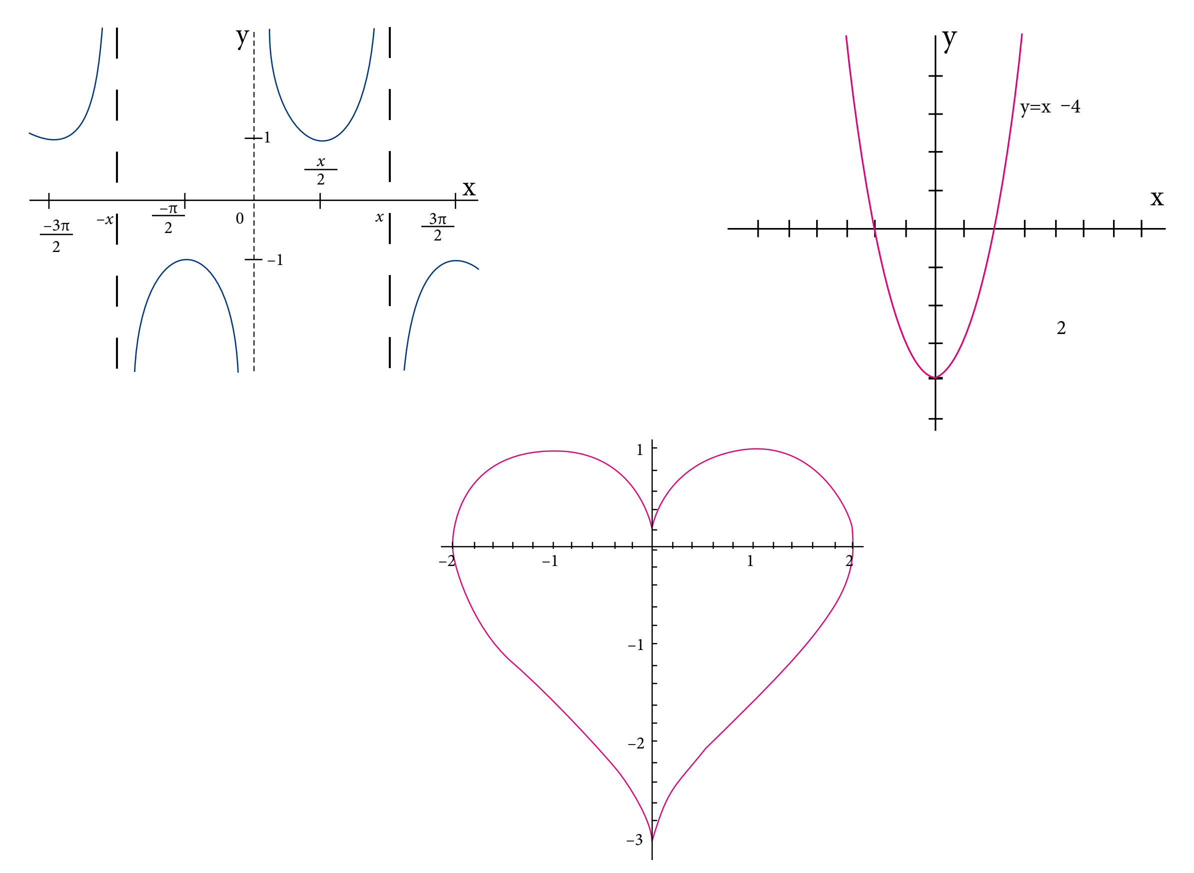


Figura 1.7

**Act-46)** ¿Cuál de las siguientes graficas corresponden a una función?






**Act-47)** Determina el dominio y la imagen de las siguientes funciones, además determina al menos dos puntos de su gráfica.

a) $f(x)=2-x$ b) $f(x)=x^2+1$ c) $f(x)=\sqrt{x}+3$ d) $f(x)=\sqrt{x}-2$

e ) $f(x)=x^2-2x+1$ f) $f(x)=x^2+2x+1$ g) $f(x)=\begin{Bmatrix} 1 \text{ si } x \geq 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{Bmatrix}$ h) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$

i) $f(x)=\frac{1}{3x+1}$ j) $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$ k) $f(x)=\sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}}$ l) $f(x)=\frac{x-2}{x^2-5x+6}$

**Act-48)** Determina en cada caso si $f=g$. Explica tu respuesta

(a) $f(x)=x$; $g(x)=\frac{x^2}{x}$ (b) $f(x)=\frac{1}{x}$ ; $g(x)=\frac{1}{x^2}$ (c) $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ ; $g(x)=x+1$

**Act-49)** Se estima que la cantidad de desperdicios a un río es una función cuadrática del tiempo. Si se tiraron 9 toneladas es un periodo de 4 días y 23 toneladas después de 7 días, determina la cantidad tirada después de 10 y 15 días.

***Análisis y gráfica de funciones numéricas elementales.***

En este apartado recordaremos y análizaremos las principales propiedades y gráficas de las funciones que has estudiado en cursos anteriores.

**Ejemplo 12: Analiza la función lineal $f(x) = 3x + 2$**

**Resolución:** Esta es una función lineal que estudiaste en el primer grado, su gráfica aparece en la figura 1.8.

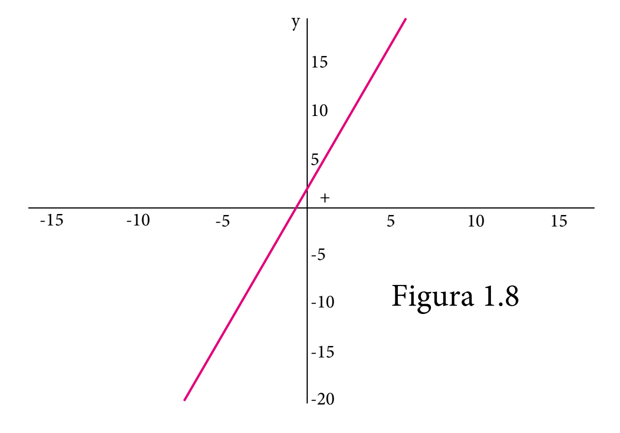


Figura 1.8

Su dominio es $\Re$, lo representamos
$Dom\ f = \Re$
Su imagen es $\Re$, lo representamos
$\text{Im} f = \Re$

Como la gráfica asciende de izquierda a derecha, los valores de la función crecen al crecer el valor de la variable independiente, es creciente porque $m = 3>0$ y sabemos que una función lineal es creciente si la pendiente es positiva.

Una función es creciente si se cumple: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1), < f(x_2)$ . En este caso se comprueba fácilmente:

$x_1 < x_2 \Rightarrow 3x_1 < 3x_2$ por que $3>0$

luego: $3x_1 + 2 = f(x_1) < 3x_2 + 2 = f(x_2)$

El cero de una función es el valor de la variable independiente para el que se anula el valor de la función, las funciones lineales tienen un único cero que se obtiene resolviendo la ecuación $f(x) = 0$ ,en este caso $3x + 2 = 0$ y se obtiene $x = -\frac{2}{3}$ .

**Las funciones definidas por una ecuación de la forma $f(x) = mx + n$ con $m, n \in \Re$ son funciones lineales. Para estas funciones se cumple: $Dom\ f = \Re, \text{Im} f = \Re$ , si m>0 la función es creciente y si m<0 es decreciente, m es la pendiente de la función. Estas funciones tienen un único cero que es la abscisa del punto en el que corta al eje X: $x = -\frac{n}{m}$.**

**Ejemplo 13:** Analiza las propiedades y gráficas de las siguientes funciones cuadráticas: **a)** $\mathbf{g(x) = -2x^2 + 3}$ **b)** $\mathbf{f(x) = x^2 + 3x + 1}$

**Resolución**:

a) Sabemos que las funciones definidas por una expresión cuadrática son funciones cuadráticas, sabemos que sus gráficas son parábolas, en este caso la representada en la figura 1.9 que abre hacia abajo (el coeficiente director de $x^2$ es negativo).

Ya sabemos $\text{Dom}g = \Re$ que. Como la parábola abre hacia abajo la imagen es un intervalo que va de -∞ a la ordenada del vértice, es decir

Im g= $(-\infty,3]$.

Como el coeficiente director es negativo la función primero crece y luego decrece, es decir, es creciente si $x<0$ y decreciente si $x>0$.

Figura 1.9



En efecto,

$$x_1<x_2<0 \Rightarrow 0<x_2^2<x_1^2 \Rightarrow 0<-x_1^2<-x_2^2 \text{ o sea } x_1<x_2<0 \Rightarrow 0<f(x_1)<f(x_2)$$

Por tanto la función es creciente en $\Re \leq 0$ y de la misma forma es decreciente en $\Re \geq 0$.

El valor de la función en el vértice de la parábola es mayor que todos los que lo rodean, esto significa que se trata de un punto de máximo (en este caso un máximo absoluto porque $f(x) = -2x^2 + 3 < 3 = f(0)$); luego el punto de máximo es $x$=0 y el valor máximo es 3.

Los ceros de la función se determinan resolviendo la ecuación $-2x^2 + 3 = 0$ , en este caso son dos ceros: $x_1 = -\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ $\quad x_2 = +\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ .

Además, la función tiene la propiedad de ser simétrica respecto al eje "Y", es decir, $f(x)=f(-x)$, esta última igualdad se expresa diciendo que la función es par.

Como $-2x^2+3=-x^2\left(2-\dfrac{3}{x^2}\right)$ cuando los valores de la variable independiente se hacen muy grandes en valor absoluto el paréntesis se aproxima a 2 y el valor de la función se hace arbitrariamente grande en valor absoluto pero negativo, esto lo expresamos diciendo que se aproxima a menos infinito ($-\infty$) cuando la variable independiente se aproxima a $+\infty$ o a $-\infty$ ; esto lo expresamos diciendo que la función tiende a $-\infty$ cuando la variable tiende a $+\infty$ o a $-\infty$ . En símbolos lo escribimos: $f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} -\infty$ .

b) Reconocemos que $Dom\ f = \Re$. pues la proyección (figura 1.10) sobre el eje "X" lo cubre completo ya que la ecuación que la determina está definida para todo número real.

En este caso el coeficiente director es positivo y la parábola abre hacia arriba, por tanto la imagen es un intervalo que va de la ordenada del vértice a $+\infty$

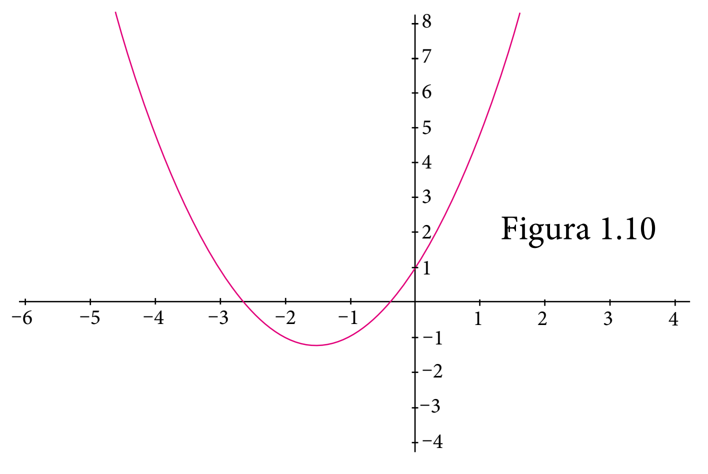



Figura 1.10

En cuanto a la imagen, al proyectar sobre el eje "Y" se obtiene un intervalo que con la función traza parece ser $[-1.25,\infty]$, en efecto, el vértice de la parábola es el punto más bajo de la gráfica; para determinar analíticamente el vértice transformamos el trinomio:

$$x^2+3x+1 = x^2 + 2\cdot\frac{3}{2}x + \frac{9}{4} + 1 - \frac{9}{4} = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \geq -\frac{5}{4}$$

aquí se hace evidente que $f(x) \geq -1.25$ lo que comprueba que la imagen es

$$\text{Im}f = [-1.25\,,\,\infty)$$

El valor de la función en el vértice es el menor de todos los valores de la función, se trata del valor mínimo absoluto de la función; expresamos la función tiene un mínimo en $x$=-1.5 y el valor mínimo (absoluto) es -1.25.

En la gráfica apreciamos que los valores de la función disminuyen de izquierda a derecha hasta llegar al vértice y después aumentan, es decir, esta función no es ni decreciente ni creciente (en todo su dominio). Decimos que la función decrece en el intervalo $(-\infty,-\frac{3}{2}]$ y crece en el intervalo $[-\frac{3}{2},\infty)$ , el punto en el que cambia de decreciente a creciente puede incluirse en ambos intervalos.

Resolviendo la ecuación $x^2+3x+1=0$ obtenemos los ceros -0.382 y -2.62

Si escribimos la función en la forma $f(x)=x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$ vemos que cuando la variable se hace muy grande en valor absoluto, los términos $\frac{3}{x}$ y $\frac{1}{x^2}$ se hacen arbitrariamente pequeños y el valor de la función se hace arbitrariamente grande.

**Esto lo expresamos diciendo que la función tiende a $+\infty$ cuando la variable tiende a $\pm\infty$, en símbolos :** $f(x)\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}+\infty$ **.**

Las funciones definidas por una ecuación de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ son funciones cuadráticas, para estas funciones se cumple *Domf* = $\Re$ su gráfica es una parábola que abre hacia arriba si a>0 y hacia abajo si a<0 y que tiene vértice $\left(-\frac{b}{2a}\,,\,\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

Si $b^2-4ac>0$ la función tiene dos ceros: $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ,si $b^2-4ac=0$ tiene un único cero doble y si $b^2-4ac<0$ no tiene ceros.

Si $a>0$, $\text{Im}f=\left[\frac{-b^2-ac}{4a}\,,+\infty\right)$ , $f$ es decreciente en el intervalo $\left(-\infty\,,-\frac{b}{2a}\right]$

y creciente en $\left[-\frac{b}{2a},\,+\infty\right)$

La función tiene un punto de mínimo en $x = -\frac{b}{2a}$ y su valor mínimo es $-\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Cuando la variable independiente se hace muy grande en valor absoluto la función tiende a $+\infty$, es decir, $f(x)\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}+\infty$.

Si $a<0$, $\mathbf{Im}\, f = \left(-\infty, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right]$ $f$ es creciente en el intervalo $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$ y decreciente en $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$

La función tiene un punto maxímo en $x = -\frac{b}{2a}$ y su valor maxímo es $-\frac{b^2-4ac}{4a}$. Cuando la variable independiente se hace muy grande en valor absoluto la función tiende a $-\infty$, es decir, $f(x)\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}-\infty$.

Cuando $c=0$ la función es simétrica con respecto al eje "Y", es decir, $f(x) = f(-x)$ y la función es par.

**Ejemplo 14: Analíza y representa gráficamente las funciones cuadráticas:**

**a)** $y = kx^2$ **para** $k \in \{-2, -1, 1, 2\}$

**b)** $y = x^2 + a$ **para** $a \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

**c)** $y = (x-b)^2$ **para** $b \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

**d)** ¿Qué se puede postular para la influencia de los parámetros **k, a, b** en la gráfica de una función en general.

**Resolución:**

La figura 1.11 muestra las gráficas obtenidas en un procesador o graficador de las funciones: $-2x^2$, $-x^2$, $x^2$, $2x^2$ . En estas gráficas podemos apreciar que el factor ***k*** corresponde a una dilatación en la dirección del eje “Y”, si duplicamos el factor se duplica la ordenada de la curva correspondiente a una abscisa dada, cuando el signo es negativo se efectúa a demás una reflexión en el eje “X”.

b) La figura 1.12 muestra las gráficas obtenidas con un procesador o graficador de las funciones: $x^2-2$, $x^2-1$, $x^2$, $x^2+1$, $x^2+2$. En estas gráficas podemos apreciar que el efecto del parámetro “***a***” es una traslación en la dirección del eje “Y”, cuando es cero obtenemos la gráfica de la parábola canónica $y=x^2$.

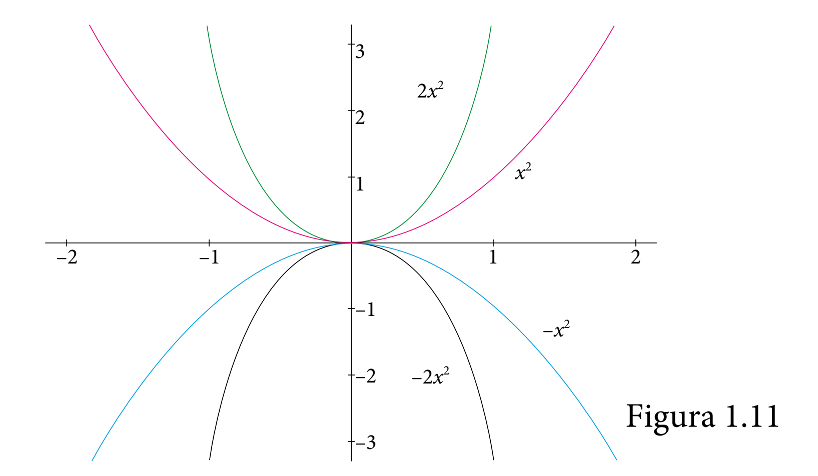


Figura 1.11

Además, si el valor de "***a***" es positivo la traslación es hacia arriba; si el valor de ***"a"*** es negativo la traslación es hacia abajo.

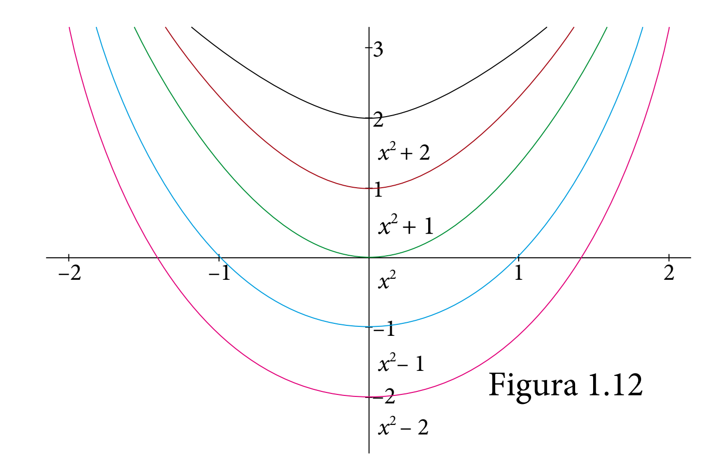


Figura 1.12

c) De igual manera en la figura 1.13 se representan las gráficas de las funciones:

$(x-(-2))^2$, $((x-(-1))^2$, $x^2$, $(x-1)^2$, $(x-2)^2$.

En esta figura 1.13 se puede apreciar que el efecto del parámetro ***"b"*** en el argumento de la función es provocar una traslación en la dirección del eje "X"; si el valor de "***b"*** es positivo (en el argumento encontramos una diferencia) la traslación es hacia la derecha, si el valor de "***b"*** es negativo (en el argumento aparece una suma) la traslación es hacia la izquierda. Cuando ***"b"*** es cero se obtiene la parábola canónica.

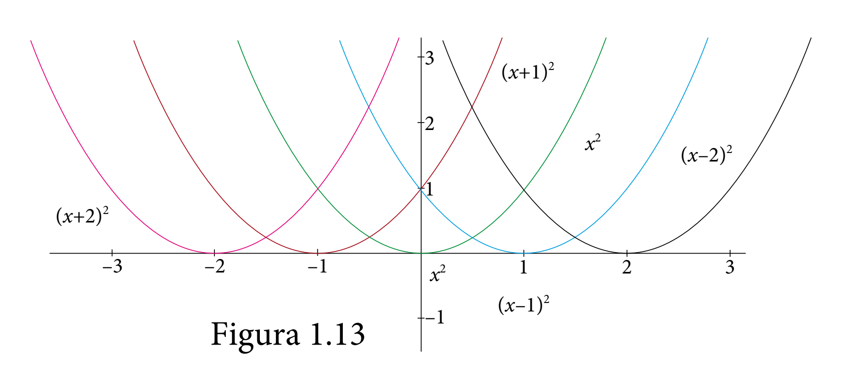


Figura 1.13

d) En general resumimos en el siguiente cuadro el efecto de los parámetros sobre el gráfico de la función $y = f(x)$.

**Si transformamos la ecuación de la función $y = f(x)$ en otra de la forma $y = k \cdot f(x-b) + a$ se producen efectos sobre la gráfica de la función:**

***"k"* provoca una dilatación en la dirección del eje "Y".**

***"b"* provoca una traslación en la dirección del eje "X", cuando *k* es positiva (en el argumento aparece una diferencia) la traslación es hacia la derecha y cuando es negativa (en el argumento aparece una suma) hacia la izquierda.**

***"a"* produce una traslación en la dirección del eje "Y", cuando es positivo la traslación es hacia arriba y cuando es negativa es hacia abajo.**

Estas propiedades pueden ser utilizadas para representar las gráficas de funciones a partir de funciones conocidas más simples.

**Ejemplo 15: Representa gráficamente y analiza las propiedades de la función $g(x) = 2x^2 + 4x - 3$**

**Resolución:** Mediante manipulaciones algebraicas podemos transformar la ecuación de la función de modo que aparezca como una transformada de la función $y(x) = x^2$.

$$g(x) = 2(x^2 + 2x + 1) - 3 - 2 = 2(x + 1)^2 - 5$$

Aplicando lo que hemos aprendido sobre el efecto de los parámetros, concluimos que la gráfica se obtiene de la parábola canónica trasladándola 1 unidad a la izquierda, dilatándola por un factor 2 y trasladándola 5 unidades hacia abajo.

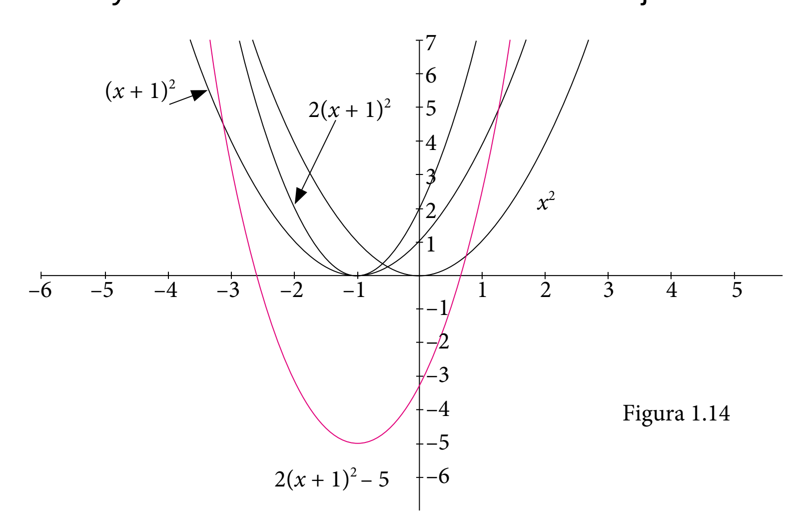



Figura 1.14

En la figura 1.14 aparecen indicados los efectos de estas transformaciones sobre el gráfico de la función, entonces las propiedades son:

$$Dom\ g = \Re \qquad \text{Img} = [-5, \infty)$$

Es **decreciente** en $[-\infty,-1]$ y **creciente** en $[-1, \infty]$, el vértice de la parábola es el punto $(-1, -5)$ esto significa que el punto de mínimo es $x=-1$ y el valor mínimo es $y=-5$. La función tiene dos ceros (el gráfico corta al eje "X" en dos puntos) que son $x_1=-2.58$ y $x_2=0.581$, no es par. Además $g(x)\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}+\infty$.

**Ejemplo 16:** Demostrar que una función cuadrática dada en su forma general $y = ax^2 + bx + c$, puede ser transformada a la forma $y = a(x - h)^2 + k$, donde las coordenadas de su vértice son $V(h, k)$.

**Resolución:** Esto se puede hacer algebraicamente por el **Método de Completar un Trinomio Cuadrado Perfecto** de la siguiente manera

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right] = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+a\left[\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+a\left[\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]$$

$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left[c-\frac{b^2}{4a^2}\right] = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{4ac-b^2}{4a}\right) = a\left(x-\frac{-b}{2a}\right)^2+\left(\frac{-b^2+4ac}{4a}\right)$$

$$= a\,(x-h)^2+k \quad ; \quad \text{donde: } V\left(h=\frac{-b}{2a},\ k=\frac{-b^2+4ac}{4a}\right)$$

De los ejemplos 15 y 16 concluimos que cuando la función cuadrática general $y = ax^2 + bx + c$ es puesta en la forma $y = a(x - h)^2 + k$, además de darnos directamente las coordenadas del vértice $V(h, k)$ de su gráfica (la parábola) también nos proporciona las unidades h y k que la gráfica de $y = ax^2$ se ha trasladado horizontalmente y verticalmente respectivamente.

**Resumen:** al recordar, repasar y analizar las funciones elementales anteriores, hemos recordado también el significado de las propiedades de las funciones y su relación con sus gráficos. Con este conocimiento podemos recordar y utilizar las propiedades de las funciones si conocemos su representación gráfica. Para las funciones básicas que utilizaremos en este curso, la representación gráfica se obtiene rápidamente utilizando un procesador electrónico (digital) matemático, no obstante es conveniente que tengas una representación mental clara de los gráficos de estas funciones.

Al enfrentarte a funciones más complejas es una práctica muy útil comenzar por trazar su gráfico utilizando un procesador matemático, sin embargo en estos casos debes tener presente que no se puede depender ciegamente de la tecnología, en ciertos casos con funciones complejas puede inducir a error, por eso debemos revisar con los conocimientos que has adquirido en el estudio de las funciones básicas.

Para su uso posterior, es importante que recuerdes cuáles son las propiedades básicas de las funciones que hemos estudiado hasta ahora.

**Propiedades a considerar en el análisis de las funciones:**
✓ Dominio e Imagen, Ceros
✓ Monotonía, puntos de máximo y de mínimo; valores máximos y mínimos.
✓ Paridad. Simetria.
✓ Comportamiento en el infinito (análisis intuitivo de hacía donde tiende la función cuando la variable independiente se hace infinita).
✓ Comportamiento en la cercanía de las asíntotas verticales de la función

***ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE:***

**Act-50)** A partir de su representación gráfica analiza el comportamiento de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x$ b) $f(x) = x + 3$ c) $f(x) = 4x - 3$ d) $f(x) = -4x + 3$
e) $f(x) = 4x^2 + 9$ e) $f(x) = 5(x - 5)^2 + 4$ g) $f(x) = 2x^2 - 3$ h) $f(x) = 3(x - 4)^2 - 6$
i) $y = 5x^2 - 3x + 2$ j) $y = - 3x^2 + x - 3$ k) $f(x) = -x^2 -2x - 8$

**Act-51)** A partir de los gráficos de las funciones $g(x) = x^3$ y $f(x) = |x|$. Grafica las siguientes funciones:

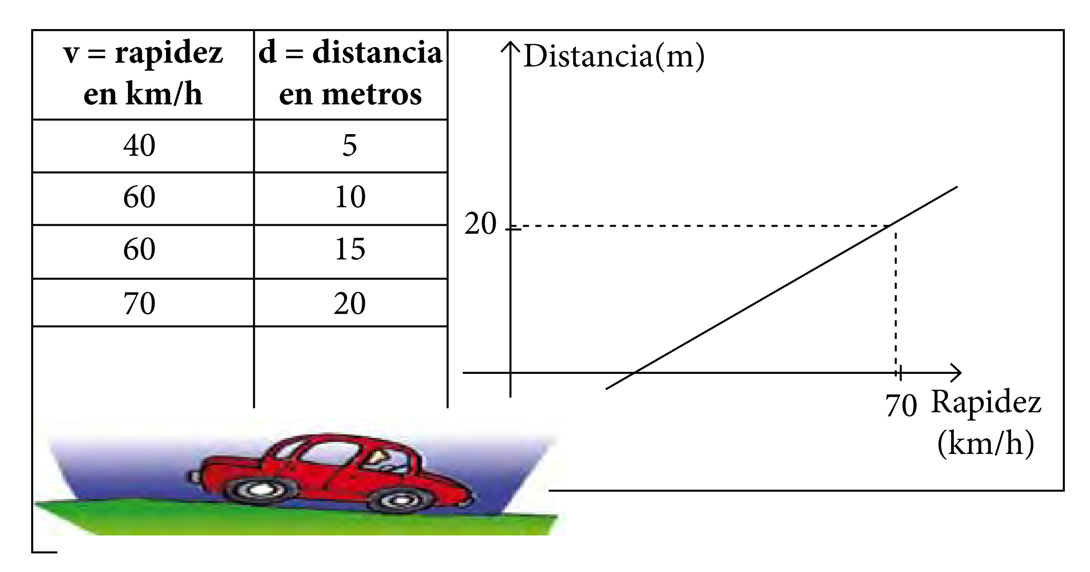
a) $y = g(x + 2)$ b) $y = g(x - 1)$ c) $y = g(x) + 1$ d) $y = g(x) - 3$
e) $f(x) = |x| + 1$ f) $f(x) = |x - 3| + 1$ g) $f(x) = 2|x|$ h) $f(x) = |x + 5| - 2$

**Act-52)** Escribe la función de costo, para el cliente, en cada uno de los siguientes casos: (a) Una empresa que renta automóviles cobra $600.00 diarios por automóvil más $ 5.00 por kilómetro recorrido. (b) Un servicio de meseros y edecanes que cobra $150.00 por salida de un miembro del personal más $40.00 por cada hora trabajada.

**Act-53)** A una compañía farmacéutica le cuesta $ 22,000.00 fabricar 250 dosis de un medicamento, mientras que producir 400 dosis le cuesta $ 35,000.00. Si el costo de producción del medicamento varía linealmente con la cantidad producida, calcular: (a) ¿Cuánto cuesta producir 100 dosis del medicamento? ; (b) los costos fijos de la compañía.

**Act-54)** En el año 2007 una familia compró una casa con valor de $ 290,000.00; en el año 2010 la casa fue revalorada en $ 380,000.00. Suponiendo que el valor de la casa crece linealmente con el tiempo, determina: (a) el valor de la casa en el año 2012; (b)¿A partir de qué año la casa tendrá un valor superior a medio millón ?

**Act-55)** De la siguiente tabla, y gráfica, obtenida experimentalmente donde se relaciona la distancia en que un automóvil se desplaza después de frenar, durante el tiempo medio de reacción, para algunos valores diferentes de la rapidez. Determinar:



| v = rapidez en km/h | d = distancia en metros |
|---|---|
| 40 | 5 |
| 60 | 10 |
| 60 | 15 |
| 70 | 20 |



a) La velocidad máxima $v_0$ a que el automóvil debe desplazarse para que pueda pararse casi instantáneamente (o sea cuando $d \approx 0$).
b) La distancia d en que el automóvil pueda pararse cuando viaja a una cierta velocidad $v \geq v_0$.
c) la distancia que recorre un automóvil antes de detenerse después de frenar, cuando viaja a 130 km/h.

**Act-56)** Un automóvil, cuyo tanque de combustible tiene una capacidad de 60 litros, tiene un rendimiento promedio en carretera de 14 km por litro. Considerando el tanque lleno, determine:

a) La función que describe la cantidad de gasolina que hay en el tanque después de que el automóvil recorre $x$ kilómetros por carretera.
b) ¿Cuál es el máximo kilometraje que puede recorrer el automóvil sin recargar el tanque?
c) ¿Cuántos litros de gasolina hay en el tanque después de que el automóvil ha recorrido una distancia de 0, 14, 28, 50 y 200 kilómetros?
d) Represente gráficamente los resultados del inciso anterior, y a partir de dicha gráfica determine los litros de gasolina que hay en el tanque después de que el automóvil ha recorrido una distancia de 100 y 300 kilómetros.
e) ¿Qué distancia ha recorrido el automóvil después de haber consumido 50.8 litros de gasolina?

**Act-57)** Calcular el área y las dimensiones del mayor campo rectangular que se puede cercar con 800 metros de malla.

**Act-58)** En una reacción química la velocidad de formación $R$ de una nueva sustancia, originada por 250 unidades de una sustancia dada como reactivo, es igual a $R(x)=10x\ (250-x)$ donde $x$ es la cantidad de nueva sustancia. ¿Para qué valor de $x$ es mínima la velocidad de la reacción?

**Act-59**) El dueño de un hotel que cuenta con 60 habitaciones ha encontrado que puede rentarlas todas a un precio de $200.00 diarios. Sin embargo, por cada aumento de $5.00 en la renta perderá un cliente. ¿Cuál debe ser el aumento en la renta para obtener el máximo ingreso? ¿Cuál es el ingreso máximo?

**Act-60)** Se estudiaron los efectos nutricionales sobre ratas que fueron alimentadas con una dieta que contenía un 10% de proteína. La proteína consistía en levadura y harina de maíz. Variando el porcentaje $p$ de levadura en la mezcla de proteína, se estimó que el peso promedio ganado (en gramos) de una rata en un período fue de $f(p)$, donde: $f(p)=-\frac{1}{50}\ p^2+2p+20\ ;\ 0\le p\le 100$. Encuentre el máximo peso ganado variando el porcentaje *p* de levadura.

**Act-61)** En la década de 1940 se realizaba con regularidad el acto de la bala humana en el circo. La boca del cañón estaba a 1m del suelo y la distancia horizontal total que recorría era de 175m. Cuando el cañón se apunta a un ángulo de 45º, la ecuación del tiro parabólico tiene la forma $y= ax^2+x+c$, donde $x$ representa la distancia horizontal recorrida y $y$ la distancia vertical. Determine una ecuación que describa el vuelo y a partir de ella encuentre la altura máxima alcanzada por la bala humana.

**Act-62)** Un jugador de fútbol patea un tiro libre de modo tal que la trayectoria de la pelota en el aire es una parábola dada por la función $y=-\,0.05x^2+0.8x$; donde y es la altura en metros alcanzada por la pelota y $x$ es la distancia horizontal al punto desde donde fue lanzada. (a) Calcular el alcance del tiro libre y (b) la altura máxima alcanzada por la pelota.

**Act-63)** El espacio recorrido por un móvil que tiene una aceleración constante $a$ y unvelocidad inicial $v_0$ se representa con la función $e(t)=v_0t+\frac{1}{2}at^2$ en la que $t$ representa el tiempo desde que comienza a moverse. Analiza las funciones que corresponden a las velocidades iniciales y aceleraciones que se indican y determina en que tiempo recorren el espacio indicado.

a) $v_0=2\frac{m}{s}\ ;\ a=1\frac{m}{s^2}\ ;\ e=15m$

b) $v_0=10\frac{m}{s}\ ;\ a=3\frac{m}{s^2}\ ;\ e=100m$

**Act-64)** Una fábrica produce cajas de madera de base cuadrada cuya altura es 1.5 veces la arista de la base. Las cajas se pintan con una pintura que cuesta $12 el litro; si con un litro se pinta 1 $dm^2$, escribe la función que describe el gasto en pintura en función de la arista de la base.

**Act-65)** Una caja se construye con una pieza cuadrada de cartón de 10 cm de lado recortando un cuadrado de lado "$x$" en cada esquina, como se muestra en la figura 1.15, y después doblando las pestañas.

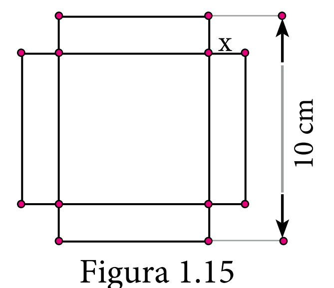


Figura 1.15

a) Determina el volumen de la caja en función de la variable "$x$".
b) Representa gráficamente esa función y determina el valor de "$x$" para el cual el volumen es máximo.

# HUMOR MATEMATICO



***Análisis y gráficas de otras funciones elementales***

Además de las funciones estudiadas y analizadas anteriormente, existe un grupo de funciones que juegan un papel importante en la Matemática y sus aplicaciones y para las que es importante tener una representación mental clara de sus gráficos y propiedades, así como disponer de recursos que nos permitan utilizarlas cuando sea necesario.

Estas funciones son las que presentamos a continuación a través del análisis de sus propiedades y sus gráficas.

***La función de proporcionalidad inversa:*** $y = \frac{k}{x}; x \neq 0, k \in \Re$

Esta función recibe ese nombre porque representa la familia de funciones que modelan la relación de proporcionalidad inversa entre dos magnitudes. Es de mucha utilidad en la ciencia, la ingeniería y la vida cotidiana, tal como lo muestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 17:** Si 12 obreros necesitan 20 días para concluir un muro, cuántos días necesitarán 8 obreros trabajando al mismo ritmo.

**Resolución:** Si el ritmo de trabajo es el mismo, el tiempo ($y$) necesario y el número de obreros ($x$) son inversamente proporcionales, es decir, su producto es constante:

$$\text{(tiempo)(número de obreros)} = yx = k \Rightarrow \ y = \frac{k}{x}$$

En cada caso $k$ toma un valor determinado y es la constante de proporcionalidad. En este caso: $k$ = (tiempo)(número de obreros)=(12)(20)=240 días-hombre. Por tanto, obtenemos que el tiempo ($y$) que necesitan 8 obreros ($x$) para hacer el mismo trabajo es de:

$$y = \frac{k}{x} = \frac{240}{8} = 30 \text{ días.}$$

La figura 1.16 muestra la gráfica de la función de proporcionalidad inversa, esta gráfica es una ***hipérbola equilátera*** y de ella inferimos:

***Dominio:*** $\Re - \{0\}$ (El denominador se anula sólo para $x = 0$)

***Imagen:*** $\Re - \{0\}$ (Al despejar obtenemos $x = \frac{1}{y}$ que sólo se indefine para $y = 0$)

***Ceros:*** No tiene, la ecuación $\frac{1}{x} = 0$ no tiene solución.

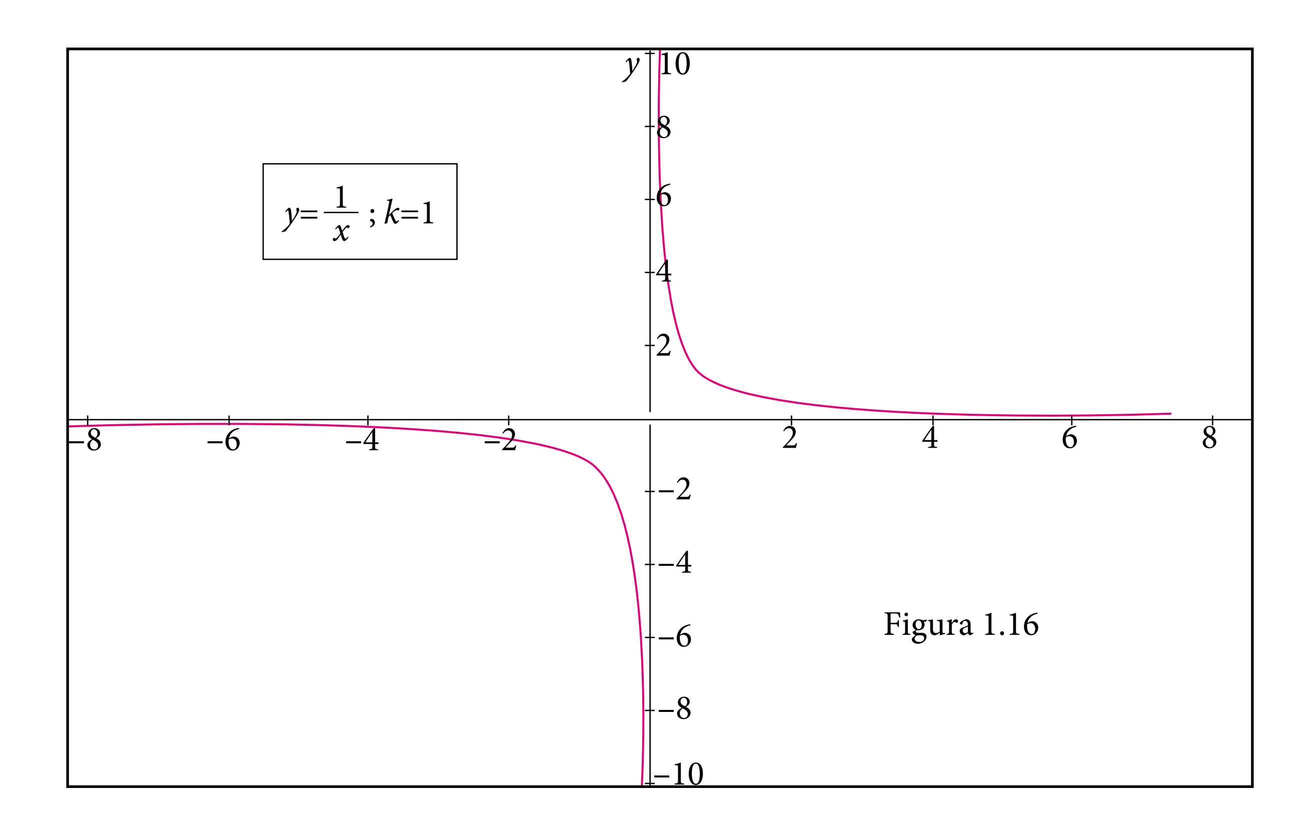


Figura 1.16

De la figura 1.16 inferimos que la función es ***decreciente*** en $\Re^-$ y $\Re^+$ porque

$0 < x_1 < x_2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}$ y $x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1} < 0$

No tiene puntos de máximo ni de mínimo.

Es impar porque $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$

Cuando la variable independiente se hace muy grande tanto por valores positivos como negativos, la función se acerca a cero. Esto se aprecia, además, en la tabla siguiente:

| $x$ | 10 | 100 | 10000 | 1000000 | | −10 | −100 | −10000 | −1000000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1/x$ | 0.1 | 0.01 | 0.0001 | $10^{-6}$ | | −0.1 | −0.01 | −0.0001 | $-10^{-6}$ |

Este resultado lo resumimos diciendo que $\frac{1}{x}$ tiende a cero cuando $x$ tiende a $+\infty$ o a $-\infty$, simbólicamente: $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ y $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$

Geométricamente esto significa que la gráfica se "pega" al eje "X" (la recta $y$=0) tanto en un extremo como en el otro, se dice que esta recta es una ***asíntota horizontal*** (bilateral) de la función.

La gráfica también muestra que la recta $x$=0 (el eje "Y") es una asíntota vertical de la función, en efecto $f(x)\xrightarrow[x\to 0^+]{}+\infty$ y $f(x)\xrightarrow[x\to 0^-]{}-\infty$ porque si se escoge un número c positivo cualquiera se cumple: Si $0 < x < \frac{1}{c}$, entonces, $\frac{1}{x} > c$.

***Función raíz cuadrada:*** $y = \sqrt{x}$ ; $x \geq 0$

La figura 1.17 muestra la gráfica de esta función.

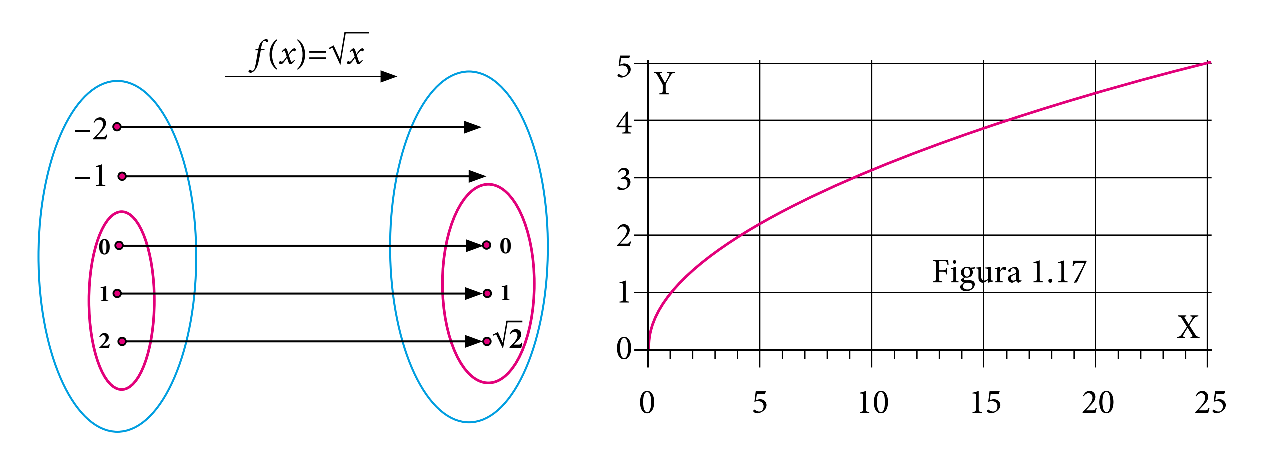


Figura 1.17

De donde se observa que:

**Dominio:** $\Re^+$ (El radical sólo está definido si $x \geq 0$)

**Imagen:** $\Re^+$ (Al despejar obtenemos $x = y^2$ que está definida para todo y, pero se han introducido raíces extrañas y por la definición del radical $y \geq 0$ )

**Ceros:** Tiene un único cero en $x$=0.

En la figura inferimos que la función es ***creciente*** en todo su dominio porque

$0 < x_1 < x_2 \Rightarrow 0 < \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$.

**Tiene un mínimo absoluto** en $x$=0 pues $\sqrt{x} \geq 0$.

Como $f(x) \neq f(-x)$ y $f(x) \neq -f(-x)$, no es par ni impar.

La función tiende a $+\infty$ cuando $x$ tiende a $+\infty$. $f(x)\xrightarrow[x\to +\infty]{}+\infty$ porque si se toma un número positivo $k$>0, por grande que sea si $x > k^2$ entonces $\sqrt{x} > \sqrt{k^2} = k$.

***Función cúbica:*** $y = x^3$

La figura 1.18 muestra la gráfica de esta función.

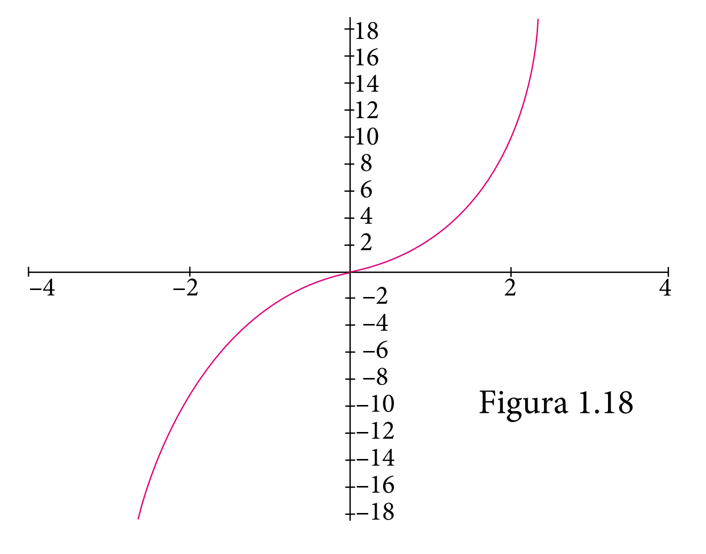



Figura 1.18

**Dominio:** $\Re$ **Imagen:** $\Re$
**Ceros:** Tiene un único cero en $x$=0.
En la figura inferimos que la función es ***creciente*** en todo su dominio porque:
$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$.

No tiene mínimo ni máximo.
Es impar porque:

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

La función tiende a $+\infty$ cuando $x$ tiende a $+\infty$ y tiende a $-\infty$ cuando $x$ tiende a $-\infty$:

$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ y $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$.

No tiene asíntotas ni horizontales ni verticales.

Las dos últimas funciones constituyen casos particulares de un tipo más general de funciones que son las **funciones potenciales.**

Se llama función potencial de exponente racional, a una función definida por una ecuación de la forma: $f(x) = x^r$ con $r \in \mathrm{Q}$

A continuación consideraremos casos especiales de estas funciones.

***Función potencial de exponente par:*** $y = x^{2n}$ $n \in \mathrm{N}$

Sus propiedades son análogas a las de la función $y=x^2$ como puede apreciarse en la figura 1.19 que muestra las gráficas para

$$y = x^2, y = x^4, y = x^6, y = x^8, y = x^{10}.$$

**Dominio:**$\Re$ **Imagen:** $\Re^+$ **Ceros:** Tienen un único cero en $x$=0.
En la figura inferimos que las funciones son ***decrecientes*** en $\Re^-$ y ***crecientes*** en $\Re^+$ por qué $x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow 0 < x_2^{2n} < x_1^{2n}$ y $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow 0 < x_1^{2n} < x_2^{2n}$

A medida que crece el exponente se “pegan” al eje “Y”.
Tienen un mínimo en $x$=0. Son pares porque $f(-x) = (-x)^{2n} = x^{2n} = f(x)$.

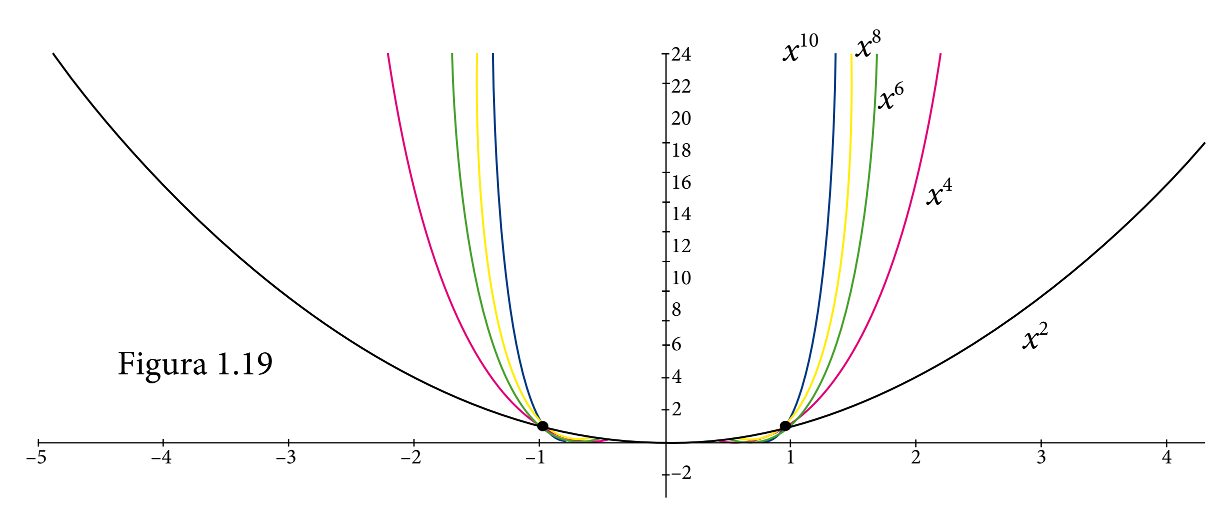


Figura 1.19

Tienden a $+\infty$ cuando $x$ tiende a $+\infty$ y a $-\infty$: $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$ y $f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}+\infty$.
Todas pasan por $(-1,1)$ y $(1,1)$.

No tienen asíntotas ni horizontales ni verticales.

***Función potencial de exponente impar: $y = x^{2n+1}$*** $n \in \mathbb{N}$

Sus propiedades son análogas a las de la función $y = x^3$ como puede apreciarse en la figura 1.20 que muestra las gráficas para $y = x^3,\ y = x^5,\ y = x^7,\ y = x^9$.

**Dominio:** $\Re$ **Imagen:** $\Re$ **Ceros:** Tienen un único cero en $x=0$.

En la figura inferimos que las funciones son crecientes en todo $\Re$ porque
$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^{2n+1} < x_2^{2n+1}$ .

No tienen mínimo ni máximo.

Son impares porque $f(-x) = (-x)^{2n+1} = -x^{2n+1} = -f(x)$.

Tienden a $+\infty$ cuando $x$ tiende a $+\infty$ y a $-\infty$ cuando $x$ tiende a $-\infty$:

$$f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}+\infty \text{ y } f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}-\infty .$$

A medida que crece el exponente se “pegan” al eje “Y”.

No tienen asíntotas ni horizontales ni verticales.

Todas pasan por $(-1,-1)$ y $(1,1)$.

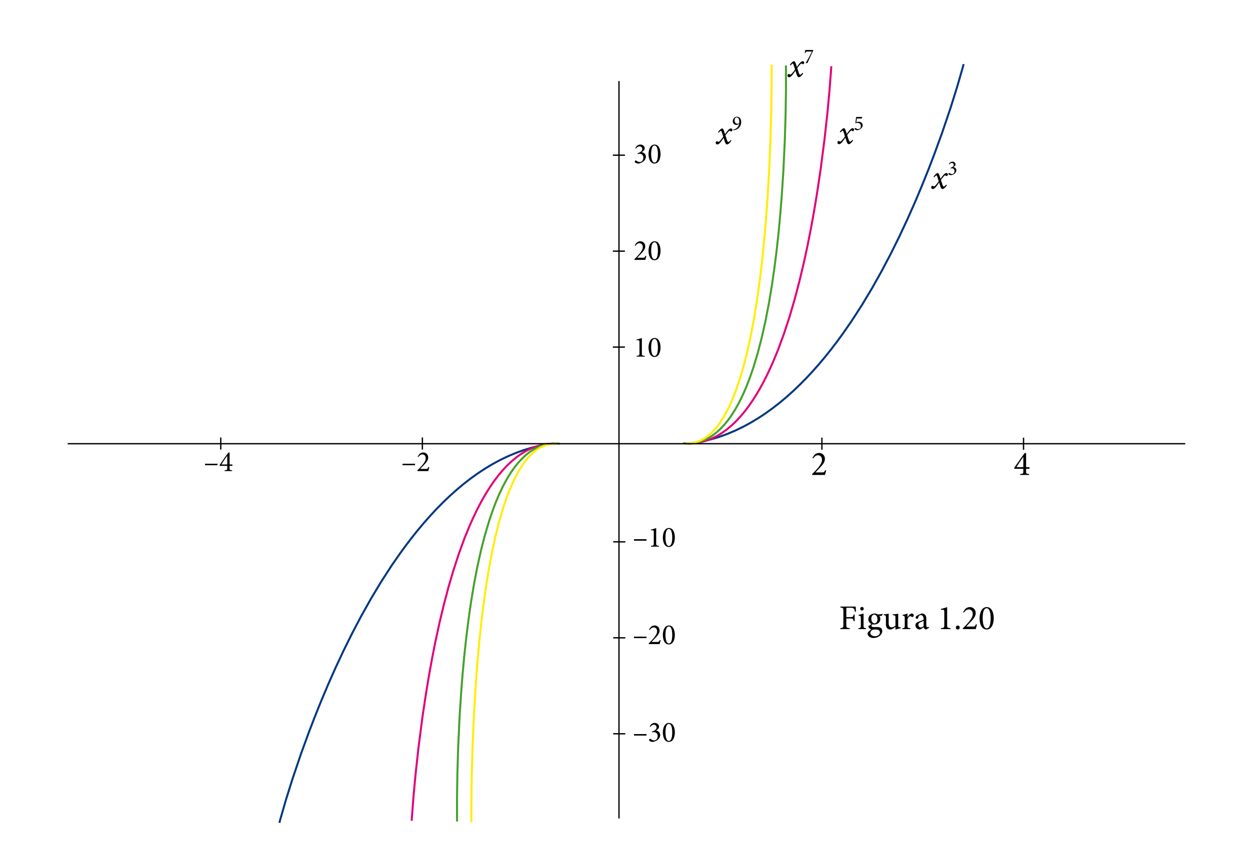



Figura 1.20

***Función potencial de exponente par negativo:*** $y = x^{-2n} \quad n \in \mathrm{N}$

La figura 1.21 muestra las gráficas obtenidas para

$$y = x^{-2},\ y = x^{-4},\ y = x^{-6},\ y = x^{-8}$$

**Dominio:** $\Re^{+} - \{0\}$ **Imagen:** $\Re^{+}$

**Ceros:** No tienen ceros.

En la figura inferimos que las funciones son ***decrecientes*** en $\Re^{+}$ y ***crecientes*** en $\Re^{-}$ por qué $x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow 0 < x_1^{-2n} < x_2^{-2n}$ y $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow 0 < x_2^{-2n} < x_1^{-2n}$

A medida que crece el exponente se "alejan" del eje "Y".

No tienen mínimo ni máximo. Son pares porque $f(-x) = (-x)^{-2n} = x^{-2n} = f(x)$.
Tienden a 0 cuando $x$ tiende a $+\infty$ y a $-\infty$: $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ y $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$

El eje "X" es una asíntota horizontal bilateral. El eje "Y" es una asíntota vertical bilateral:

$f(x) \xrightarrow[x \to 0^-]{} +\infty$ y $f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$

Y todas pasan por $(-1,1)$ y $(1,1)$.

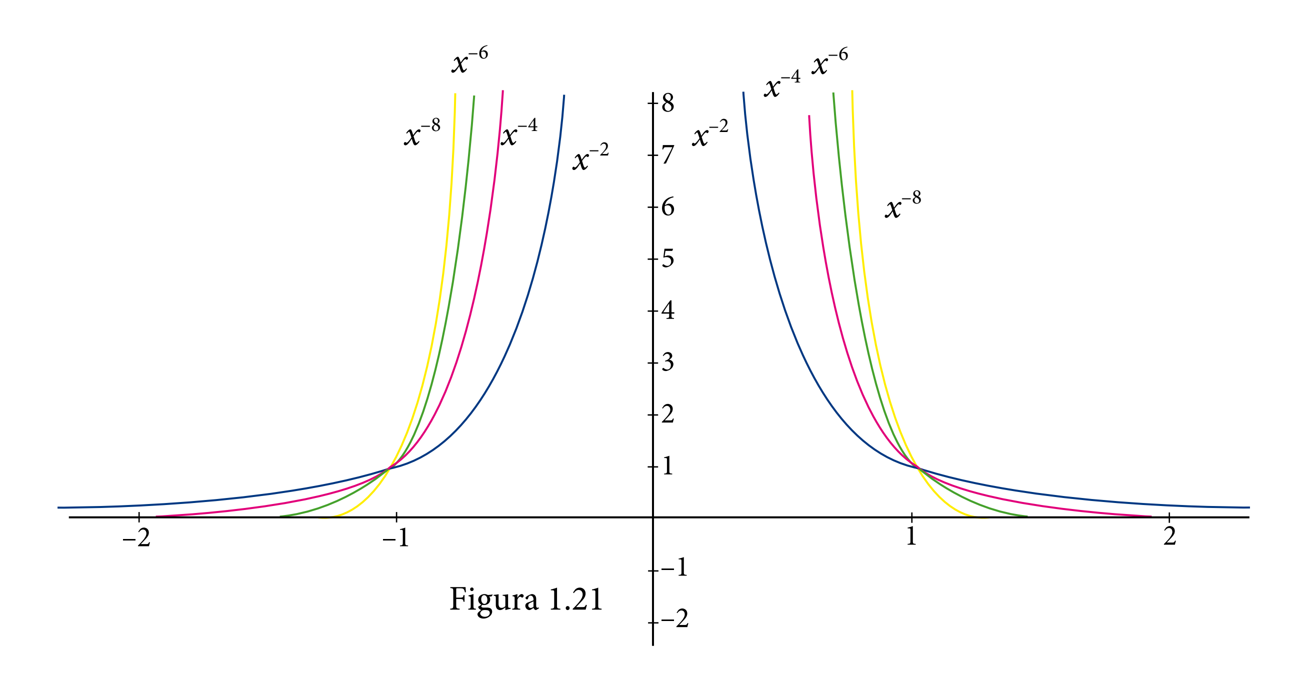



Figura 1.21

***Función potencial de exponente impar negativo:*** $\boldsymbol{y = x^{-(2n+1)}}$ $n \in \mathrm{N}$

Sus propiedades son análogas a las de la función $y = \dfrac{1}{x}$ como puede apreciarse en la figura 1.22 que muestra las gráficas obtenidas para

$$y = x^{-3},\ y = x^{-5},\ y = x^{-7},\ y = x^{-9}$$

**Dominio:** $\Re^{+}-\{0\}$ **Imagen:**$\Re^{+}-\{0\}$

**Ceros:** No tienen ceros.

En la figura inferimos que las funciones son ***decrecientes*** en $\Re^{-}$ y $\Re^{+}$ porque $x_1 < x_2 \Rightarrow 0 < x_2{}^{-(2n+1)} < x_1{}^{-(2n+1)}$ No tienen mínimo ni máximo.

Son impares porque $f(-x) = (-x)^{-(2n+1)} = -x^{-(2n+1)} = -f(x)$.

Tienden a $0$ cuando $x$ tiende a $+\infty$ y a $-\infty$: $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ y $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$.

El eje “X” es una asíntota bilateral horizontal.
A medida que crece el exponente se “alejan” del eje “Y”.
El eje “Y” es una asíntota bilateral vertical:$f(x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} -\infty$ y $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$.

Todas pasan por (-1,-1) y (1,1).

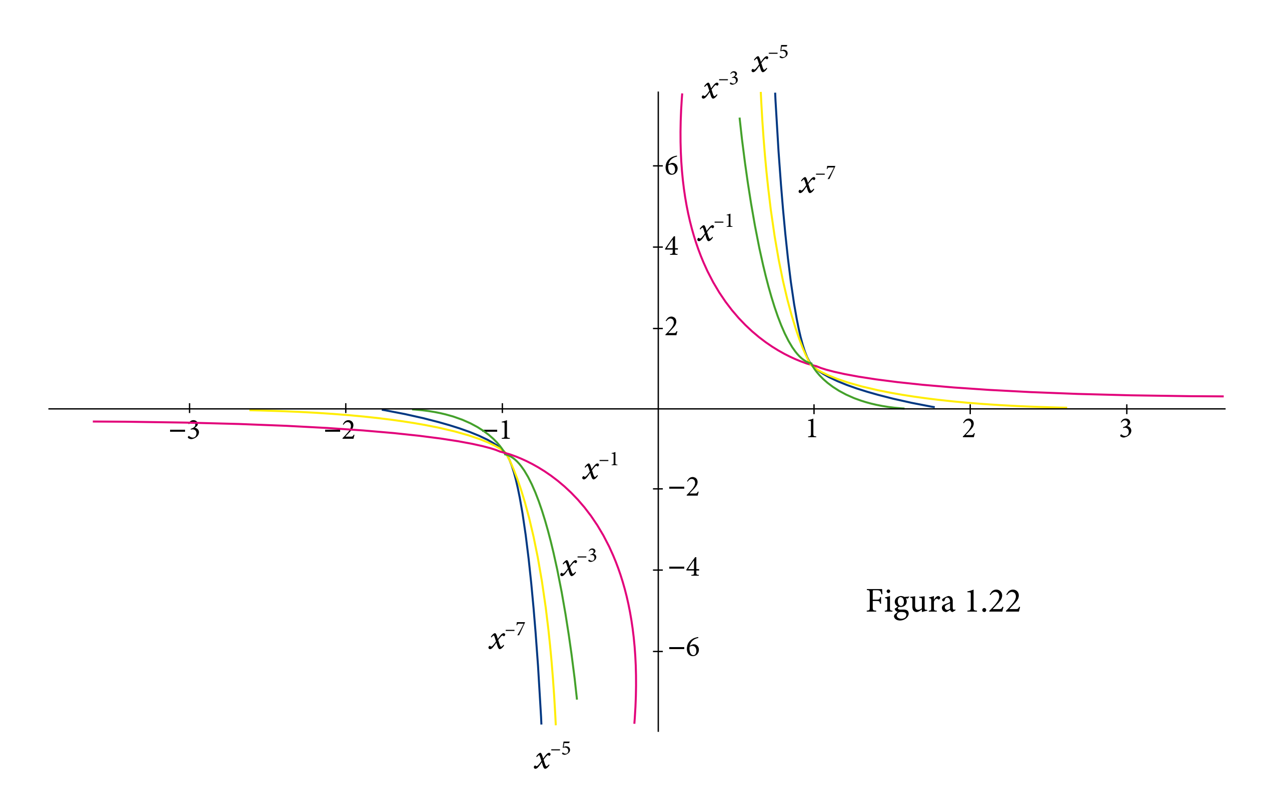



Figura 1.22

**Ejemplo 18:** Analiza las funciones a) $f(x) = x^4 - 16$ b) $g(x) = \dfrac{3}{(x-2)^3}$.

**Resolución:** a) Se trata de la transformación de una función de exponente par positivo, en este caso $x^4$, mediante un desplazamiento en la dirección del eje "Y" hacia abajo en 16 unidades como vemos en la figura 1.23. Las propiedades son entonces:

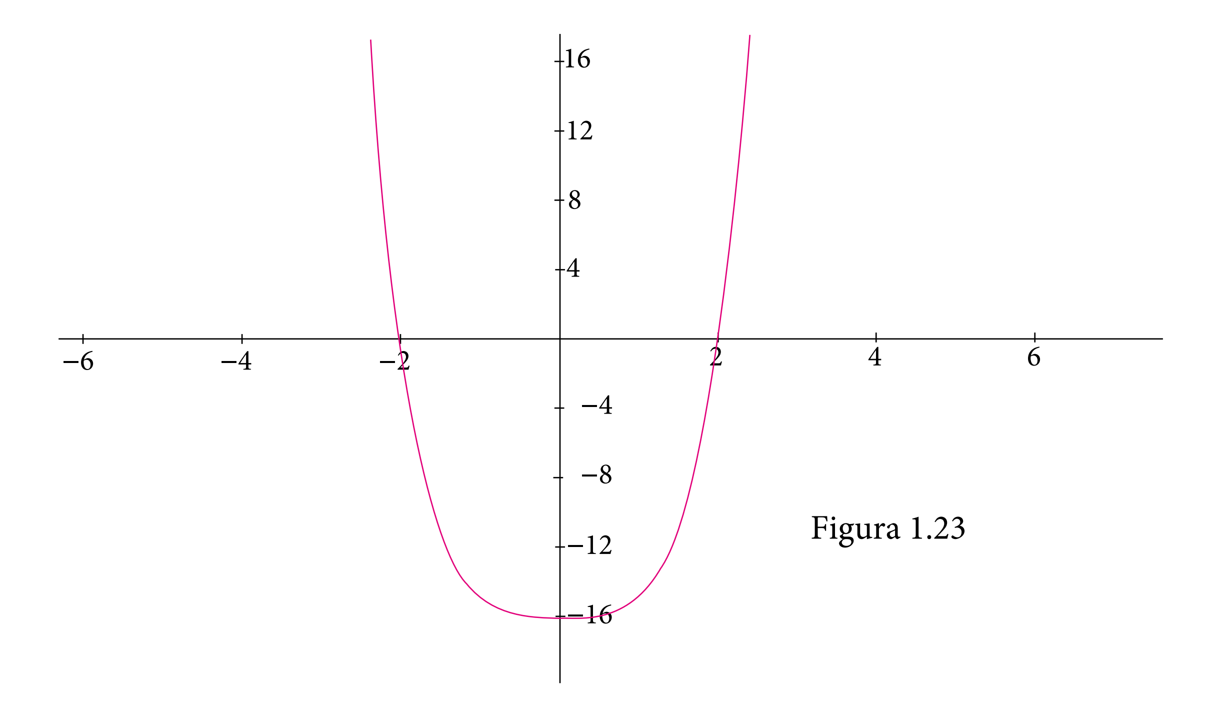



Figura 1.23

**Dominio:** $\Re$ **Imagen:** $[-16, \infty)$ que resulta de desplazar $\Re^+$ 16 unidades hacia abajo. **Ceros:** Tiene dos ceros $x$=2 y $x$=-2 que son las soluciones de la ecuación $x^4-16=0$. Las función es ***decreciente*** en $\Re^-$ y creciente en $\Re^+$. Tiene un mínimo en $x$=0, el valor del mínimo es -16. Es par.

Tiende a + ∞ cuando $x$ tiende a +∞ y a −∞:
$f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$ y $f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}+\infty$.

b) En este caso es la transformada de una función de exponente negativo impar, mediante un desplazamiento de dos unidades a la derecha y una dilatación por un factor 3 en la dirección del eje "Y" como ilustra la figura 1.24.

**Dominio:** $\Re-\{2\}$ **Imagen:** $\Re-\{0\}$

**Ceros:** No tiene. La función es ***decreciente*** en $(-\infty, 2]$ y en $[2,+\infty)$.

No tiene mínimo ni máximo. No es par ni impar.

Tiende a 0 cuando $x$ tiende a +∞ y a −∞: $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ y $f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}0$

El eje "X" es una asíntota bilateral horizontal.

La asíntota vertical bilateral se desplaza 2 unidades a la derecha, luego ahora la asíntota es la recta $x$=2. Esto significa: $f(x)\xrightarrow[x\to2^-]{}-\infty$ y $f(x)\xrightarrow[x\to2^+]{}+\infty$ .

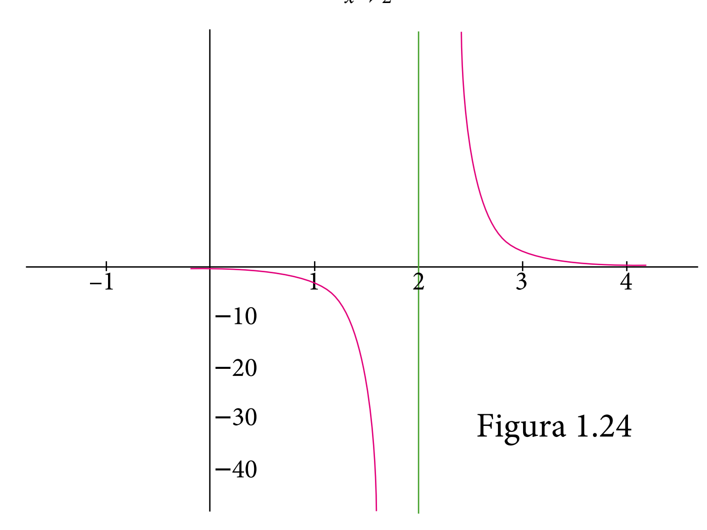


Figura 1.24

***Función potencial de exponente fraccionario positivo:*** $y=x^{\frac{m}{n}}$, m, n ∈ N

Ya hemos considerado el caso en el que **m** es múltiplo de **n**, ahora nos concentraremos en el caso en el que se trata de una fracción no entera.

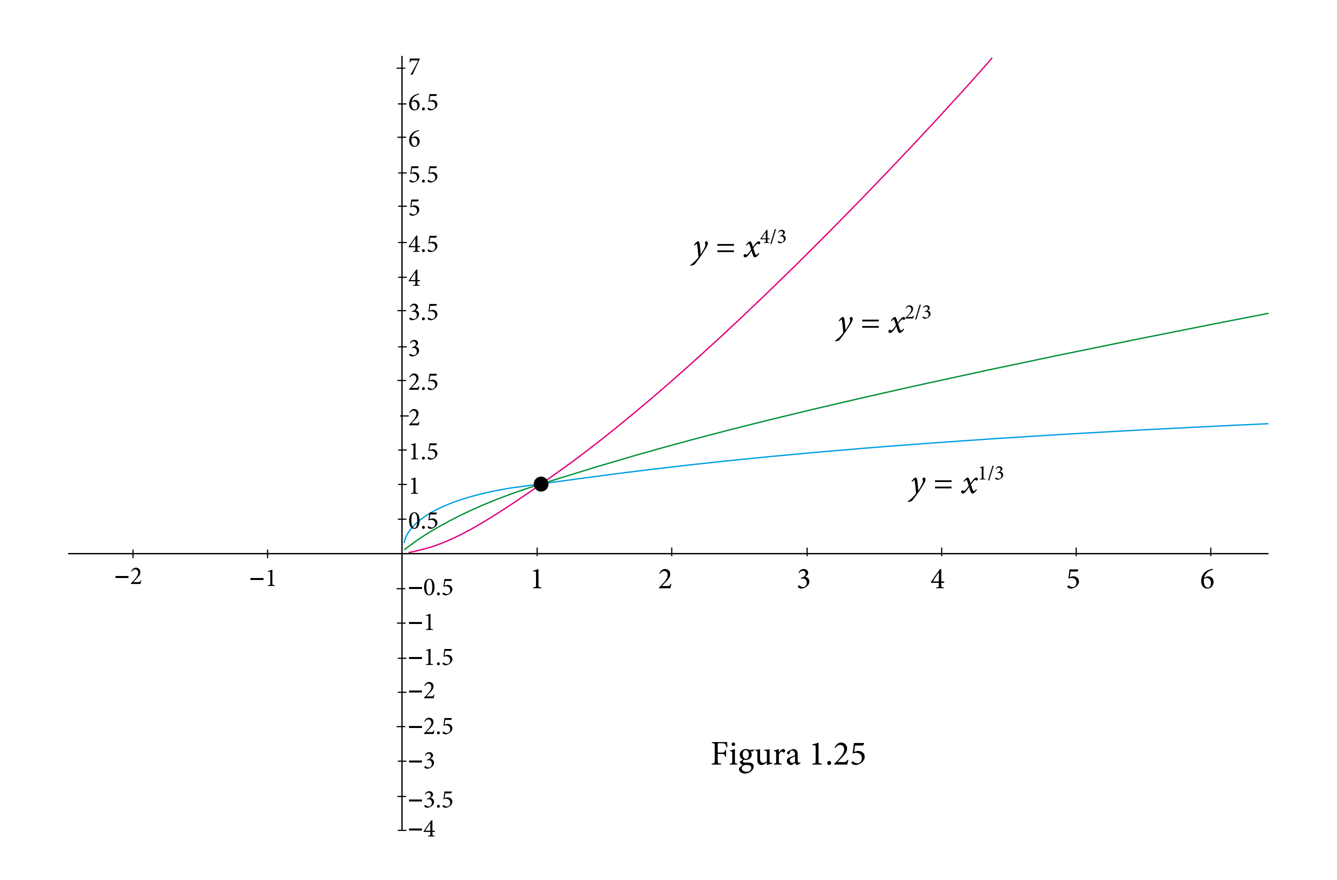



Figura 1.25

Sus propiedades son, en cierta medida, análogas a las de la función $y = \sqrt{x}$ como puede apreciarse en la figura 1.25 que muestra las gráficas obtenidas para:

$$y = x^{\frac{1}{3}} \;,\; y = x^{\frac{2}{3}} \;,\; y = x^{\frac{4}{3}}$$

**Dominio:** $\Re^+$ **Imagen:** $\Re^+$ **Ceros:** Un único cero en $x=0$.

En la figura inferimos que estas funciones son crecientes en todo su dominio porque $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^{\frac{m}{n}} < x_2^{\frac{m}{n}}$. Tienen mínimo absoluto en $x=0$. No son pares ni impares.

Tienden a $+\infty$ cuando $x$ tiende a $+\infty$.

A medida que crece el exponente se “alejan” del eje “X”. Todas pasan por $(1,1)$.

***Función potencial de exponente fraccionario negativo:*** $y = x^{\frac{-m}{n}}$ , $m, n \in N$

Sus propiedades son análogas, en cierta medida, a las de la función $y = \frac{1}{x}$ como puede apreciarse en la figura 1.26 que muestra las gráficas para

$$y = x^{-\frac{1}{3}} \;,\; y = x^{-\frac{2}{3}} \;,\; y = x^{-\frac{4}{3}}$$

**Dominio:** $\Re^+$ **Imagen:** $\Re^+$

**Ceros:** No tienen ceros.

En la figura inferimos que las funciones son ***decrecientes*** en todo su dominio porque $x_1 < x_2 \Rightarrow x_2^{\frac{m}{n}} < x_1^{\frac{m}{n}}$ No tienen mínimo ni máximo. No son pares ni impares.

Tienden a 0 cuando $x$ tiende a $+\infty$: $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ .

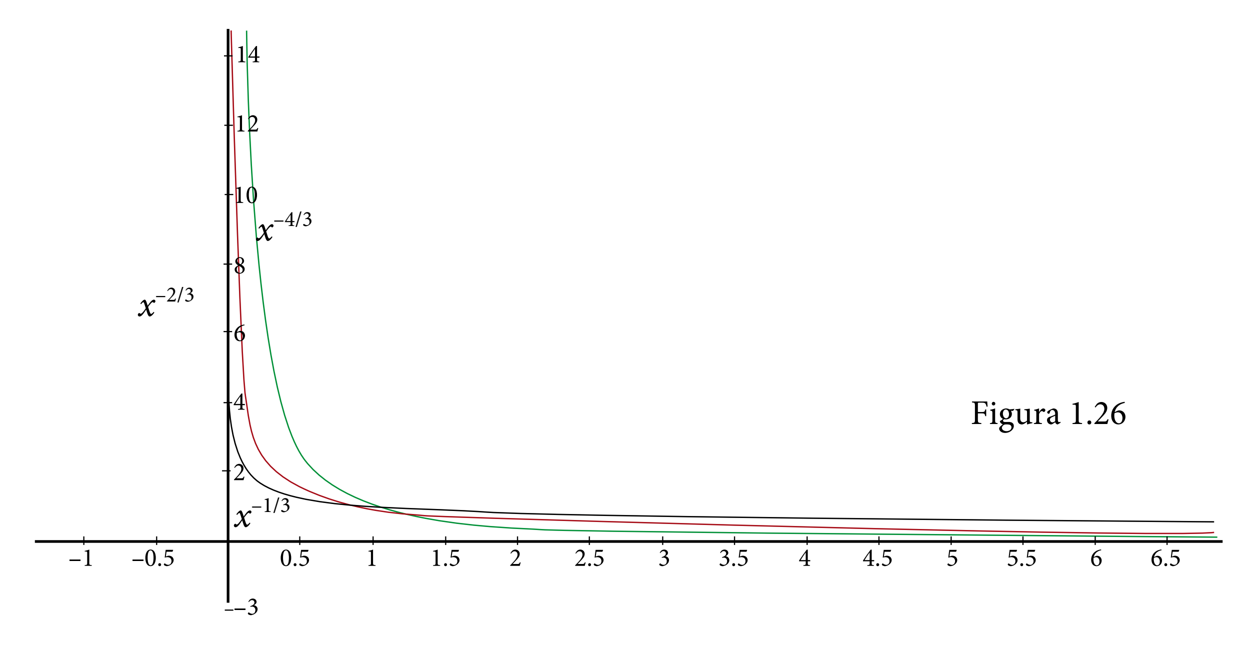


Figura 1.26

Todas pasan por (1,1).

El eje "X" es una asíntota unilateral horizontal. A medida que crece el exponente se "alejan" del eje "Y". El eje "Y" es una asíntota unilateral vertical: $f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} \infty$ .

**Ejemplo 19:** Analiza las funciones ***a)*** $f(x) = \left(\frac{x-3}{x-1}\right)^{\frac{1}{3}}$ ***b)*** $f(x) = \left(\frac{x-3}{x-1}\right)^{-\frac{1}{3}}$

**Resolución:** a) Representamos la función en un procesador electrónico y obtenemos la figura 1.27.

**Dominio:** En la figura observamos que la proyección sobre el eje "X" no cubre el intervalo $[1,3)$, esto es así porque de acuerdo con la definición esta función sólo está definida cuando el argumento está definido y es no negativo, es decir, cuando $\frac{x-3}{x-1} \geq 0$ y, por tanto, ***Dom f*** $= \Re -$**[1,3)**.

**Imagen:** La proyección sobre el eje "Y" cubre el semieje no negativo excepto $y = 1$. Para verificar, expresamos "$x$" en términos de "$y$" : $y = \left(\frac{x-3}{x-1}\right)^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow y^3 = \frac{x-3}{x-1}$, luego $y^3x - y^3 = x - 3$, y entonces, $x\,(y^3 - 1) = y^3 - 3$.

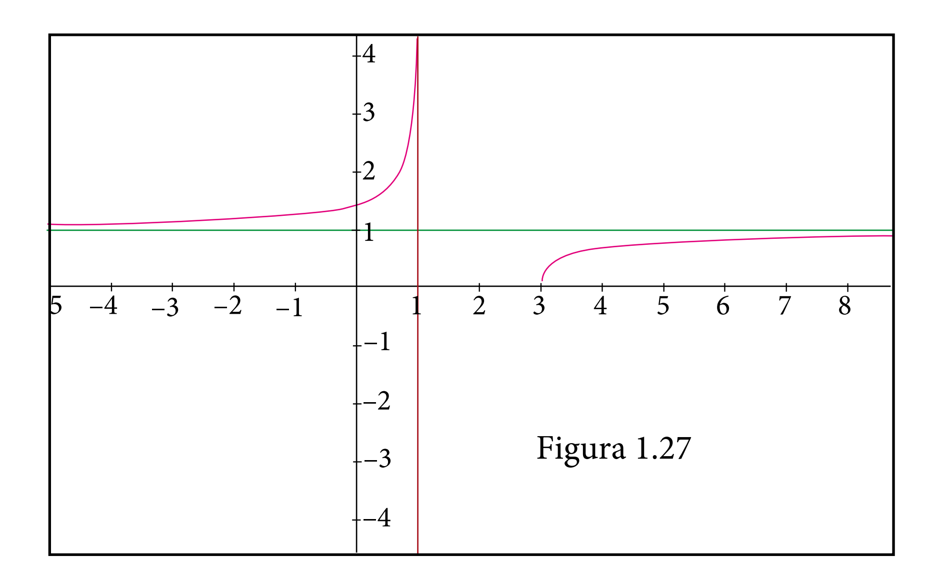


Figura 1.27

es decir, $x = \dfrac{y^3-3}{y^3-1}$ ; esta expresión deja de estar definida para $y = 1$ y como $y \geq 0$, resulta $\mathbf{Im}\boldsymbol{f} = \Re^+ - \{1\}$.

La función tiene un único cero en $x = 3$.

No es ni par ni impar.

Tiene un mínimo absoluto en $x = 3$ y el valor es $0$.

La recta $x = 1$ es una asíntota unilateral vertical, los valores de la función se aproximan a $+\infty$ cuando la variable se aproxima a 1 por la izquierda.

Cuando la variable crece o decrece ilimitadamente el valor de la función se aproxima a 1:

$$f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 1 \text{ y } f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

Posteriormente se desarrollarán herramientas para comprobar estas afirmaciones que se infieren del gráfico.

b) Representamos la función en un procesador y obtenemos la figura 1.28.

**Dominio:** En la figura observamos que la proyección sobre el eje “X” no cubre el intervalo [1,3) esto es así porque de acuerdo con la definición esta función sólo está definida cuando el argumento está definido y es no negativo, es decir, cuando

$$\frac{x-3}{x-1} > 0$$

y, por tanto, $\boldsymbol{Dom\, f} = \Re - [2,3)$.

**Imagen:** La proyección sobre el eje "Y" cubre el semieje no negativo excepto $y=1$. Para verificar, expresamos "$x$" en términos de "$y$" y obtenemos:

$y=\left(\dfrac{x-3}{x-1}\right)^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow y^3=\dfrac{x-1}{x-3}$ luego $y^3x-3y^3=x-1$, y entonces, $x\,(y^3-1)=3y^3-1$, es decir,

$x=\dfrac{3y^3-1}{y^3-1}$; esta expresión deja de estar definida para $y=1$ y como $y\geq 0$, resulta

***Im f* = $\Re^+$ – {1}.**

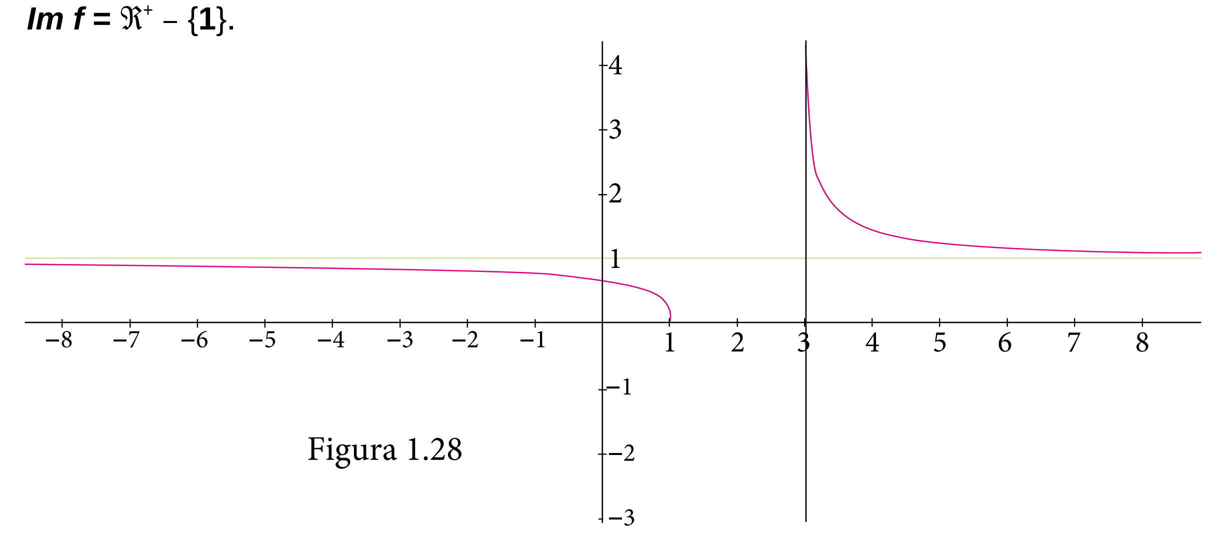


Figura 1.28

La función tiene un cero en $x=1$. No es ni par ni impar. No tiene máximo, pero si un mínimo y=0 en $x=1$. La recta $x=3$ es una asíntota unilateral vertical, los valores de la función se aproximan a $+\infty$ cuando la variable se aproxima a 1 por la derecha.

Cuando la variable crece o decrece ilimitadamente el valor de la función se aproxima a 1: $f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}1$ y $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}1$ .

***<u>ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE:</u>*** 

**Act-66)** En un grupo escolar 18 alumnos tendrían que pagar 60 pesos cada uno para comprar un regalo a una compañera del grupo, ¿cuánto tendrá que pagar cada uno si al final participan 48 alumnos?

**Act-67)** Un coche circulando a una velocidad promedio de 90 km/h ha tardado 15 horas en realizar un viaje. ¿Cuánto tiempo tardará en el mismo trayecto a una velocidad promedio de 80 km/h?

**Act-68)** Sí 500 hombres tiene víveres para 20 días a razón de 3 raciones diarias. ¿Cuántas raciones diarias hay que repartir para que los víveres duren 5 días más?

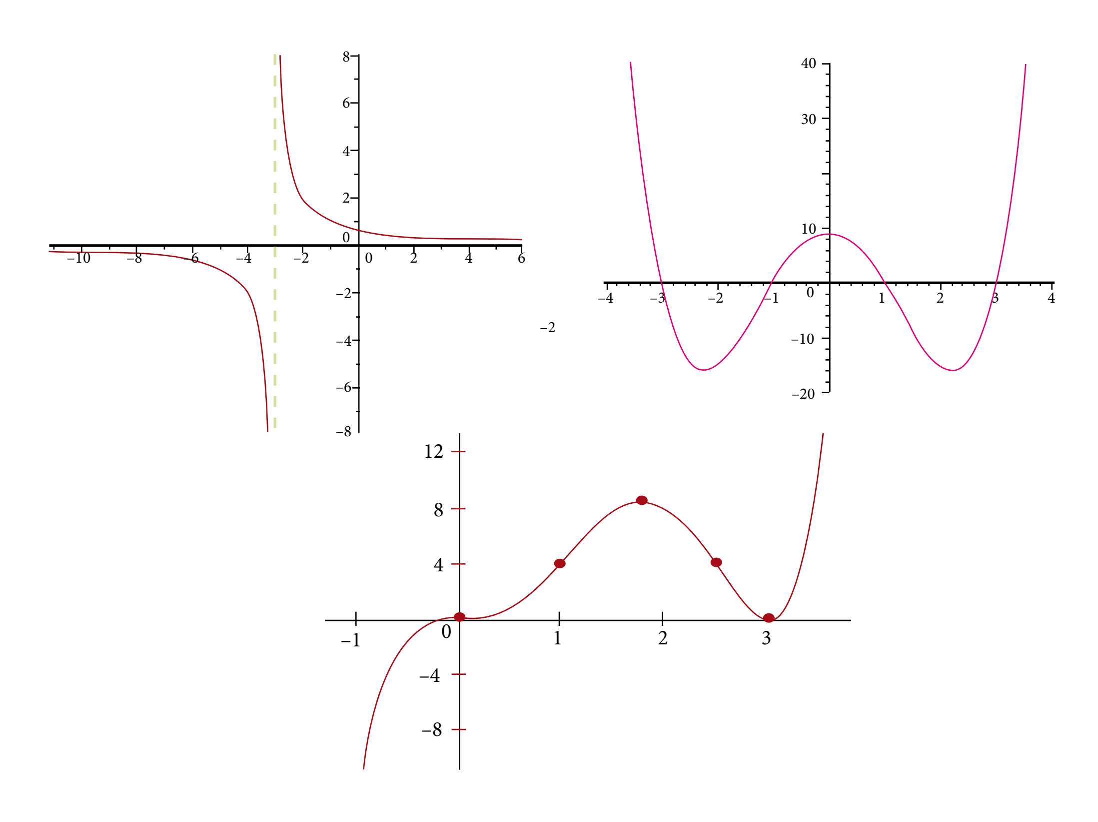
**Act-69)** Si 20 hombres cavaron un pozo en 10 días trabajando 8 horas diarias y 40 hombres cavaron otro pozo igual en 8 días trabajando 5 horas diarias, ¿cuál de las cuadrillas trabajó más eficientemente?

**Act-70)** Tres grifos llenan un depósito de 10 $m^3$ en 10 horas. ¿Cuánto tardarán en llenar un depósito de 8 $m^3$ dos grifos iguales a los anteriores?

**Act-71)** Con 12 kilos de alimento, 9 conejos comen durante 6 días. ¿Cuántos días tardarán 2 conejos en comerse 8 kilos de alimento?

**Act-72)** 10 hombres se comprometieron a realizar una obra en 24 días. Trabajaron 6 días a razón de 8 horas diarias. Entonces se les pidió que terminaran la obra 8 días antes del plazo fijado, se colocaron más obreros que trabajan al mismo ritmo, trabajaron 12 horas diarias y cumplieron lo pedido. ¿Cuántos obreros más se colocaron?

**Act-73)** Analiza las curvas $y = f(x)$ cuyas gráficas se muestran a continuación:



**Act-74)** Grafica y analiza las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{3}{x-4} + 2$ b) $y = \dfrac{1}{x+1} - 1$ c) $y = \sqrt{x} + 2$ d) $y = \sqrt{x-5} - 10$

e) $y = 2(x-5)^3+1$ f) $f(x) = (x+8)^5-2$ g) $y = 3(x+1)^4-4$ h) $y = (x-1)^6+3$

i) $y = x^{-2}+3$ j) $y = (x-1)^{\frac{1}{3}}+5$ k) $y = (x+1)^{-\frac{1}{4}}$ l) $y = 2(x+5)^{-\frac{2}{5}}+3$

m) $y = 2x^{-\frac{3}{4}}+3$ n) $y = \dfrac{2}{(x-4)^3} - 6$ o) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$ p) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x-3}}$

***Operaciones con funciones***

En el estudio de las funciones hemos encontrado algunas que se pueden describir utilizando otras más simples, por ejemplo la función $f(x)=x^3+x+\frac{2}{x}-\sqrt{x}$ se puede describir como una suma algebraica de las funciones: $f_1(x)=x^3$, $f_2(x)=x$, $f_3(x)=\frac{2}{x}$, y $f_4(x)=\sqrt{x}$. A su vez la función $f_1$ puede describirse como el producto de tres funciones iguales a $f_2(x)=x$ y la función $f_3$ como el cociente de $f_2$ y $f_5(x)=2$.

De manera semejante la función cuadrática $f(x)=5x^2-3x+7$ puede ser considerada como el resultado de sumar la funciones $g(x)=5x^2$ y $h(x)=-3x+7$. O sea, que con las funciones, de la misma manera que con los números, se pueden realizar las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación, potenciación, división y de sacar raíz.

En general, sean $f$ y $g$ dos funciones y supongamos que ***Dom*** $f$ y ***Dom*** $g$ denotan sus dominios respectivamente, las operaciones básicas entre ellas de suma, resta, multiplicación y la división se definen como sigue:

**Suma:** $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ **; donde el dominio de** $f+g$ **es** ***Dom*** $f \cap$ ***Dom*** $g$.

**Ejemplo 20**. Sea $f(x)=x$ y $g(x)=\sqrt{x}$.

Entonces $(f+g)(x)=x+\sqrt{x}$. El dominio de $f$ es $(-\infty,\infty)$ y el dominio de g es $[0,\infty)$. Así el dominio de $f+g$ es ***Dom*** $f \cap$ ***Dom*** $g = (-\infty,\infty)\cap[0,\infty)=[0,\infty)$.

**Resta:** $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ **; donde el dominio de** $f-g$ **es** ***Dom*** $f \cap$ ***Dom*** $g$.

**Ejemplo 21.** Sea $f(x)=\sqrt{x+1}$ y $g(x)=\sqrt{x-4}$.

Entonces $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-4}$. El dominio de $f$ es $[-1,\infty)$, y el dominio de g es $[4,\infty)$. El dominio de $f-g$ es ***Dom*** $f \cap$ ***Dom*** $g = [-1,\infty)\cap[4,\infty)=[4,\infty)$.

**Multiplicación:** $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$. **El dominio de** $f\cdot g$ **es** ***Dom*** $f \cap$ ***Dom*** $g$.

**Ejemplo 22.** Sea $f(x)=x-3$ y $g(x)=x+3$.

Entonces $(f\cdot g)(x)=f(x)\,g(x)=(x+3)(x-3)=x^2-9$. El dominio de $f$ es $\Re$ y el dominio de g también es $\Re$. Por tanto el dominio de $f\cdot g$ es ***Dom*** $f \cap$ ***Dom*** $g = \Re$.

**Ejemplo 23**. Sea $f(x)=|x|$ y $g(x)=10$.

Entonces $(g\cdot f)(x)=g(x)\cdot f(x)=10\cdot|x|$. Tanto el dominio de $f$ como el de g es $\Re$.

Entonces el dominio de $f\cdot g$ es ***Dom*** $f \cap$ ***Dom*** $g = \Re$. Además, si $x=-5$, entonces $(g\cdot f)(-5)=g(-5)\cdot f(-5)=10\cdot|-5|=10\cdot 5=50$.

**División: $(f / g)(x) = f(x) / g(x)$ , $g(x) \neq 0$. El dominio de $f/g$ es *Dom* $f$ ∩ *Dom* g excluyendo los valores de $x$ para los cuales $g(x) = 0$.**

**Ejemplo 24.** Si $f(x) = x + 4$ y $g(x) = x^2 - 1$.

Entonces $(f / g)(x) = f(x) / g(x) = (x+4) / (x^2-1)$. El dominio de $f$ y el de g son los números reales. La función es cero para $x$=1 y $x$=-1. Por lo tanto el dominio de $f/g$ es ***Dom f*** ∩ ***Dom*** **g** = $\Re - \{-1, 1\}$

**Ejemplo 25.** Si $f(x)= \sqrt{x}$ y $g(x)= \sqrt{-x}$. Entonces $(f/g)(x)= \sqrt{x} / \sqrt{-x}$. Como el dominio de $f$ es $[0, \infty)$ y el dominio de g es $(-\infty, 0]$, por tanto pareciera que ***Dom f*** ∩ ***Dom*** **g** = $\{0\}$. Pero el dominio de $f/g$ excluye los valores para los cuales $g(x)$ es igual a cero, o sea se excluye $x$=0 ya que $g(0) = 0$. Por lo tanto en realidad el dominio de $(f / g)(x)$ es el conjunto vacío, y en consecuencia se tiene que la función $(f / g)(x)$ no está definida.

**Ejemplo 26.** Sea $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ y $g(x) = 3x+1$ . Encuentre a) la suma, b) la diferencia, c) el producto y d) la división de $f$ y g.

**Resolución:** las funciones pedidas son:

a) $f(+g)(x) = \sqrt{4-x^2} + (3x+1)$     b) $(f\text{-}g)(x) = \sqrt{4-x^2} - (3x+1)$

c) $(f \cdot g)(x) = \sqrt{4-x^2} \cdot (3x + 1)$     d) $(f \cdot g)(x) = \sqrt{4-x^2} / (3x+1)$

Como el dominio de $f$ es el intervalo cerrado $[-2, 2]$ y el dominio de g es $\Re$. En consecuencia la intersección de sus dominios es $[-2, 2]$, de donde el dominio de (a), (b) y (c) es el intervalo $[-2, 2]$. En la parte (d) la función $g(x) = 3x + 1$ es cero si $x = -1/3$ y por lo tanto el dominio es $\{x \mid -2 \leq x \leq 2, x \neq -1/3\}$.

A continuación también definiremos dos operaciones que son de suma importancia en el estudio del cálculo diferencial e integral, nos referimos a la composición de funciones y la determinación de la función inversa de una función.

***Composición de funciones***

Ya sabes que la notación "g(a)" significa el valor de la función $g(x)$ cuando $x$=a. Por ejemplo, $g(x) = \sqrt{x-5}$, entonces $g(a) = \sqrt{a-5}$. De igual manera, si $f(x)$ es una función, entonces $g(f(x))$ es la función que se obtiene al sustituir $f(x)$ en lugar de $x$, en la expresión de $g(x)$. La función $g(f(x))$ es llamada la compuesta de g con $f$ y se denota así:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

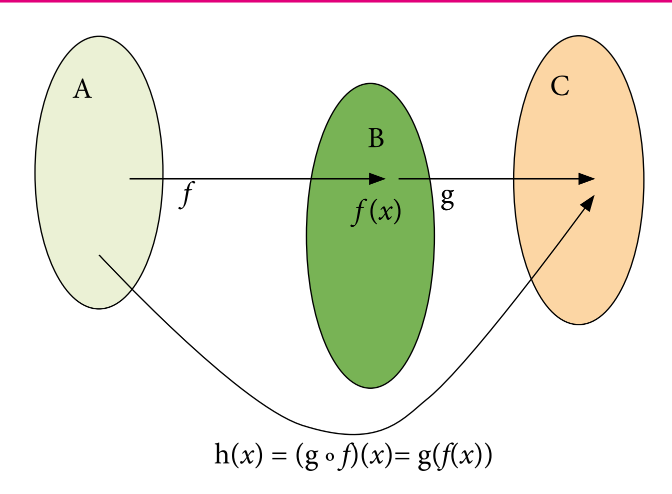
Por ejemplo la función $h(x) = \sqrt{x+2}$ puede describirse como el resultado de aplicar sucesivamente las funciones $f(x) = x+2$ y $g(x)= \sqrt{x}$ , en efecto si $x \in \Re$ tenemos $x \xrightarrow{f} (x+2) \xrightarrow{g} \sqrt{x+2}$ ,en otras palabras hemos "compuesto" las funciones para obtener la función dada: $h(x)= g(f(x))$.

Hay que observar que el dominio de la función compuesta está contenido en el dominio de la primera función que se aplica (que se escribe a la derecha) y su imagen está contenida en la imagen de la segunda función que se aplica (que se escribe a la izquierda). Hemos recalcado el orden de aplicación pues es importante notar que la que se escribe a la izquierda es la última que se aplica.

En general, la ***función compuesta*** de las funciones $\boldsymbol{g}$ y $\boldsymbol{f}$ que se denota por $g \circ f$ se define de la siguiente forma:

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad , \quad h: A(Dom\, f) \to C\,(\mathrm{Im}\, g)$$

Es decir, resulta de aplicar sucesivamente $\boldsymbol{f}$ (primero) y $\boldsymbol{g}$ (después), tal como se ilustra en el grafo de abajo.




El dominio de $h(x)$ es: $Dom\, g \circ f = \{x \mid x \in Dom\, f \text{ y } f(x) \in Dom\, g\}$. En consecuencia para formar la función composición es necesario que el contradominio de la función $\boldsymbol{f}$ sea igual o un subconjunto del dominio de la función $\boldsymbol{g}$.

**Ejemplo 27.** Sí $g(x)=\sqrt{x-5}$ y $f(x)=x^2+1$, determina: $h(x) = (g \circ f)(x)= g(f(x))$

**Resolución:** $h(x) = (g \circ f)(x)= g(f(x))=\sqrt{(x^2+1)-5} = \sqrt{x^2-4}$

**Ejemplo 28.** Sea $f(x) = x + 5$ y $g(x) = x^2$. Encuentre $g \circ f$ y especifique su dominio.

**Resolución:** Por las definiciones de $g \circ f$, $f$ y $g$, tenemos que $(g \circ f)(x)= g(x+5)=(x+5)^2$. Tanto el dominio de $f$ como el de $g$ es $\Re$, y el contradominio de $f$ es igual al dominio de $g$. por lo tanto, el dominio de $(g \circ f)(x)$ es también el conjunto $\Re$.

Por supuesto que también se puede calcular la composición de $f$ con $g$. En este caso obtenemos primero la imagen de $x$ bajo $g$ y luego aplicamos $f$ a $g(x)$. Esto nos da una función compuesta denotada por $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2)= x^2 + 5$. Ya que en este

ejemplo se observa que, $x^2+5 \neq (x+5)^2$ se concluye que, en general $(f\circ g)(x)\neq(g\circ f)(x)$. De donde, la operación de composición no es conmutativa.

**Ejemplo 29.** Sean $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=2x-3$. Encuentre $(f\circ g)(x)$, $(g\circ f)(x)$ y sus dominios.

**Resolución:** Por las definiciones de $f\circ g$, $g\circ f$, $f$ y g tenemos que

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x-3) = \sqrt{2x-3}$ $\quad$ $(g\circ f)(x) = g(f(x) = g(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}-3$

El dominio de g es $(-\infty, \infty)$, y el dominio de $f$ es $[0, \infty)$. Por tanto, el dominio de $f\circ g$ es el subconjunto de $\Re$ para los cuales $2x-3 \geq 0$, o, equivalentemente $[3/2, \infty)$. Y el dominio de $g\circ f$ es el subconjunto de $\Re$ para los cuales $x \geq 0$, es decir $[0, \infty)$.

**Ejemplo 30.** Dadas las funciones: $f(x)=\dfrac{1}{2x-1}$ ; $g(x)=\dfrac{2x-1}{2x+1}$ ; $v(x)=\dfrac{1}{x}$ . Determinar la función compuesta $w(x) = (h\circ g\circ f)(x)$.

**Resolución:** primeramente determinamos $h(x)= g\circ f$ y después $w(x)=(v\circ g\circ f)(x)$

$$h(x)=(g\circ f)(x)= g(f(x))= g\left(\frac{1}{2x-1}\right)=\frac{2\left(\frac{1}{2x-1}\right)-1}{2\left(\frac{1}{2x-1}\right)+1}=\frac{-2x+3}{2x+1}$$

$$\therefore\ w(x)=(v\circ g\circ f)(x)= (v\circ g\circ f))(x)= v\left(\frac{-2x+3}{2x+1}\right)=\frac{1}{\frac{-2x+3}{2x+1}}=\frac{2x+1}{-2x+3}$$

**Nota:** Saber reconocer una suma, producto, cociente o composición de funciones es de mucha utilidad porque permite descomponer funciones complicadas en otras más sencillas. En particular esto quedara de manifiesto en la unidad de aprendizaje 3 al estudiar la regla de la cadena para calcular derivadas.

**Ejemplo 31:** Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x)=1-x^2$, $h(x) = \cos(x)$ , determina las funciones: **a)** $f\circ g$ **b)** $g\circ h$ , **c)** $h\circ g$ , **d)** $f\circ h$ **e)** $g\circ f$ **y** **f)** $f\circ(g\circ h)$.

**Resolución:**

a) Según la definición, la expresión de la función compuesta es

$(f\circ g)(x) = f(g(x))= f(1-x^2)$ esta última expresión significa que debemos evaluar $f$ tomando como argumento $1-x^2$: $f(1-x^2) = \sqrt{1-x^2}$ el dominio de esta función numérica es $\{x : |x| \leq 1\}$ y ese es el dominio de la función compuesta ya que los valores de $x$ para los que $1-x^2 < 0$ tienen la imagen fuera del dominio de $f$ y no se puede aplicar la segunda función.

b) $(g\circ h)(x) = g(h(x))= g(\cos(x))= 1-(\cos(x))^2 = \text{sen}^2(x)$, como el dominio del coseno (que es la primera función en aplicarse) coincide con el de la función seno podemos escribir: $(g\circ h)(x)=\text{sen}^2(x)$.

c) $(h \circ g)(x) = h(1-x^2) = \cos(1-x^2)$, en este caso no tenemos una expresión más simple para la compuesta, su dominio es el de la expresión obtenida.

d) $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(\cos(x)) = \sqrt{\cos(x)}$, en este caso tampoco tenemos una expresión más simple, de nuevo el dominio de la función compuesta coincide con el dominio de la expresión, es decir, se puede escribir: $(f \circ h)(x) = \sqrt{\cos(x)}$.

e) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = 1 - g(\sqrt{x})^2 = 1-x$ , sin embargo, esta última expresión está definida para todo número real y la función f sólo está definida para los no negativos; por tanto la función compuesta hay que definirla como: $(g \circ f)(x) = 1-x$, con $x \in \Re$

f) $(f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = f(\text{sen}(x)) = \sqrt{sen^2 x} = |sen\ x|$ que está definida sobre el dominio de la expresión obtenida.

Aunque no vamos a profundizar en este aspecto, es bueno observar que la composición $(f \circ g) \circ h$ conduce al mismo resultado que $f \circ (g \circ h)$, es decir, ***la composición de funciones es asociativa:*** $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

**Ejemplo 32:** Si $\boldsymbol{f(x) = x^2}$, $\boldsymbol{w(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}}$, $\boldsymbol{g(x) = \sqrt{x}}$ determina las funciones
**a)** $\boldsymbol{g \circ f}$, **b)** $\boldsymbol{f \circ g}$, **c)** $\boldsymbol{f \circ w}$.

**Resolución:**

a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = |x|$ es decir, la compuesta de estas funciones es la función valor absoluto de $x$.

b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$, es decir, en este caso la compuesta es la función que a cada número real no negativo asigna el mismo número, es decir, se debe describir en la forma: $(f \circ g)(x) = x$ , $x \in \Re^+$.

c) $(f \circ w)(x) = f(w(x)) = f\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)^2 = \frac{1}{x+1}$ ,pero $w$ sólo está definida en el intervalo $(-1,+\infty)$ luego la compuesta es: $(f \circ w)(x) = \frac{1}{x+1}$ $x \in (-1,+\infty)$.

Los ejemplos anteriores reafirman que el dominio de la compuesta es siempre un subconjunto del dominio de la primera función que se aplica por lo que si el dominio de la expresión algebraica que se obtiene sobrepasa ese subconjunto hay que especificar el dominio al dar la expresión de la compuesta.

**Ejemplo 33:** Dadas $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{1-x}}$ **y** $\boldsymbol{g(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}}$, determina $h(x) = (f \circ g)(x)$.

**Resolución:** $(f \circ g)(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2+2}{x^2+1}} = \sqrt{\frac{x^2+1-(x^2+2)}{x^2+1}} = \sqrt{\frac{-1}{x^2+1}}$

pero esta expresión no está definida para ningún número real, es decir, la función definida por esa expresión no existe.

Esto se debe a que $y=\frac{x^2+2}{x^2+1}=1+\frac{1}{x^2+1}$, luego $\boldsymbol{Im}\, g=(1,+\infty)$ y, como $\boldsymbol{Dom} f=(-\infty\ ,\mathbf{1}]$, se tiene $\boldsymbol{Dom} f \cap \boldsymbol{Im} g=\varnothing$ es decir, no se puede definir la compuesta.

**Al definir una función compuesta hay que verificar que la imagen de la función interior tiene elementos comunes con el dominio de la exterior. De no tener elementos comunes, no se puede definir la compuesta.**

***ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE:***

**Act-75)** Sean $f(x)=3x-2$ , $g(x)=x^2-5x+6$ y $h(x)=\sqrt{x}$. Realiza las siguientes operaciones determinando el dominio correspondiente de la función que resulta:

1) $(f+g)(x)$ 2) $(f-g)(x)$ 3) $(g-f)(x)$ 4) $(f\cdot g)(x)$ 5) $(f\circ g)(x)$

6) $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$ 7) $(g\circ f)(x)$ 8) $(h\circ f)(x)$ 9) $\left(\frac{h\circ g}{f}\right)(x)$ 10) $\left(\frac{f\cdot f}{g}\right)(x)$

**Act-76)** Dada la función $f(x)=3x^2+2$, calcular: $g(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

**Act-77)** Dada la función: $f(x)=3x^2+2x-4$, calcular: $g(x)=\frac{f(x+a)-f(x)}{a}$

**Act-78)** Dada la función $f(x)=2x^3-6$, calcular: $g(x)=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

**Act-79)** En los siguientes ejercicios, $f(x)=3x-5$ y $g(x)=x^2+1$. Evalúa cada una de las expresiones siguientes:

a) $(f\circ g)(2)$ b) $(f(g(-3))$ c) $(g\circ f)(-1)$ d) $(g(f(5))$ e) $(f\circ f)(-2)$ f) $g\left(g\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

**Act-80)** Dadas las funciones $\boldsymbol{f}$ y $\mathbf{g}$, determina $f \circ g$ y $g \circ f$:

a) $f(x) = 2x + x^{-2}$ ; $g(x) = x^4 + 2x + 1$

b) $f(x) = |x|$ ; $g(x)\ \sqrt{x}$

c) $f(x) = sen^2(x)$ ; $g(x) = \sqrt{x-1}$

d) $f(x) = x^2$ ; $g(x) = x + 5$

e) $f(x) = \sqrt{1-x}$ ; $g(x) = sen(2x)$

f) $f(x) = x + 3$ ; $g(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$

g) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2+1}$ ; $g(x)\ \dfrac{x}{x+1}$

h) $f(x) = x^2 + 3x + 1$ ; $g(x) = \sqrt{x+1}$

i) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ ; $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$

j) $f(x) = \sqrt{x^2-3}$ ; $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$

**Act-81)** Determina si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow (f \circ f) = x$

b) $f(x) = sen^2(x)$ ; $g(x) = \sqrt{x} \Rightarrow (g \circ f)(x) = sen(x)$

c) $f(x) = sen(x)$ ; $g(x) = 1$ ; $h(x) = \sqrt{x} \Rightarrow h(g(x) - f(x^2)) = |\cos(x)|$

**Act-82)** Expresa $f(x) = \dfrac{x+1}{|x^2 - 5x + 3|}$ como una composición de funciones.

**Act-83)** El radio de una lámina metálica circular crece al calentarse de modo que $t$ segundos después de iniciar el calentamiento el radio es $r(t) = 3 + 0.01t$. Expresa el área de la lámina en función del tiempo.

***Funciones inyectivas, sobreyectivas, biyectivas e inversas***

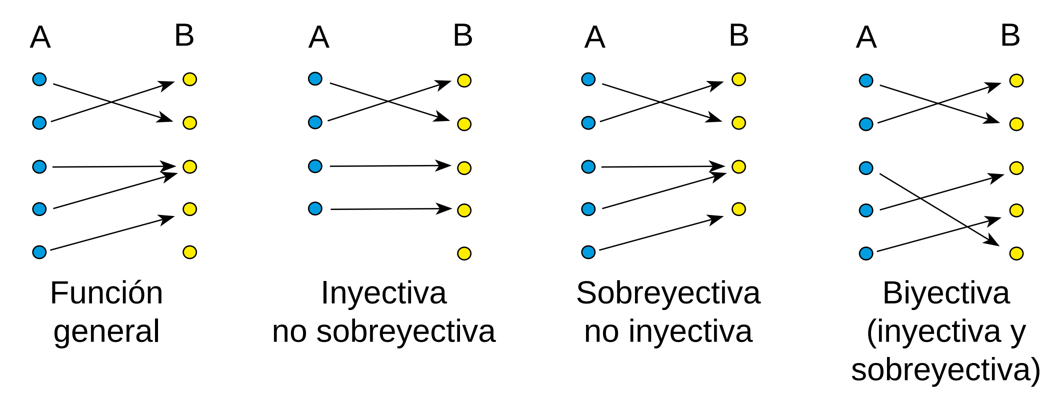
Según el tipo de correspondencia las funciones pueden o no tener ciertas propiedades que son determinantes para poder realizar algunas operaciones entre ellas. Algunas de estas propiedades son las siguientes:

**Una función $f: X \to Y$ es inyectiva, o "uno a uno", si para cada elemento en el conjunto imagen de $f$ corresponde un único *elemento* (preimagen) en el dominio**

De manera más precisa, una función $f: X \to Y$ es inyectiva cuando para $x_1, x_2 \in X$ se cumple alguna de las dos afirmaciones equivalentes:

- Si $f(x_1) = f(x_2)$, necesariamente se cumple $x_1 = x_2$.
- Si $x_1 \neq x_2$ necesariamente se cumple $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

O sea, una función es inyectiva si cada $y = f(x)$ es la imagen de exactamente un único elemento del dominio. En otras palabras, de todos los pares $(x,y)$ pertenecientes a la función, las y no se repiten.




El significado gráfico de la inyectividad es que rectas paralelas al eje "X" cortan a la gráfica en un único punto. De donde, para determinar geométricamente si una función es inyectiva, graficamos la función por medio de una tabla de pares ordenados. Luego trazamos líneas horizontales (paralelas al eje X) para determinar si las $y$ (las ordenadas) se repiten o no.

En la figura 1.29 se muestran las gráficas de las funciones cuadrática y cubica. El gráfico de la función cuadrática muestra que para cada valor de la imagen hay dos preimágenes, es decir, dos valores del dominio que tienen a ese valor como imagen pues cada número real positivo tiene dos raíces cuadradas, una positiva y una negativa. En el gráfico de la función cúbica vemos que cada número real tiene una única preimagen pues a cada número real corresponde una única raíz cúbica real.

En la figura 1.29 también se puede ver que rectas paralelas cortan en un punto a la gráfica de la función cúbica y en dos a la gráfica de la función cuadrática. En el caso de la función cuadrática las rectas que están por debajo del eje no cortan a la gráfica pues la imagen de la función cuadrática es el conjunto de los reales no negativos.

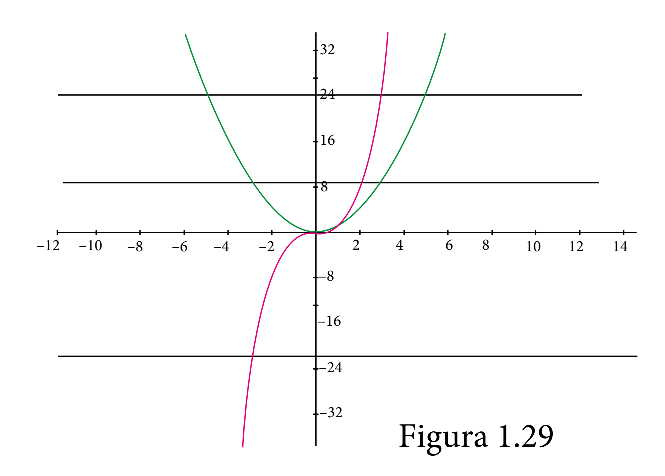



Figura 1.29

Del análisis gráfico anterior concluimos que la función cúbica es inyectiva, y la función cuadrática no lo es.

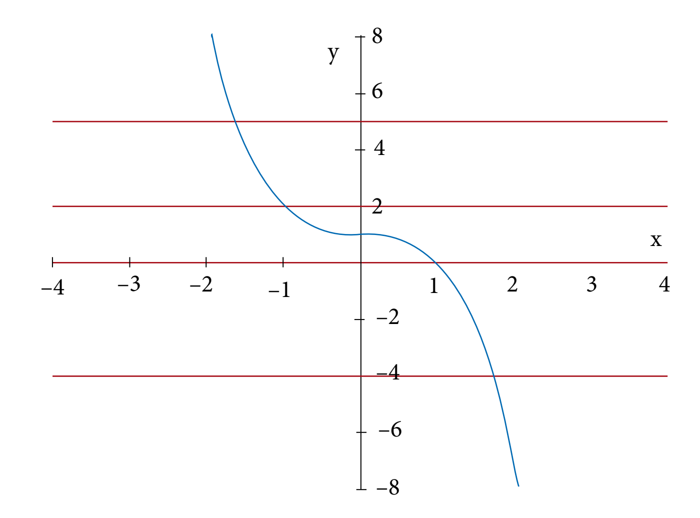
Esto se puede probar analíticamente pues la ecuación $x^3 = a$ tiene exactamente una solución para todo $a \in \Re$, también lo vemos en que: $x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$ . En cambio la función cuadrática no es inyectiva pues la ecuación $x^2 = a$ tiene dos soluciones si $a > 0$, $+\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$. En otras palabras $x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow |x_1| = |x_2|$ y no $x_1 = x_2$.

A veces se puede lograr que una función no inyectiva se convierta en inyectiva restringiendo su dominio, por ejemplo sabemos que la función cuadrática no es inyectiva, pero si consideramos la función cuadrática con dominio y contradominio restringido a $\Re^+$, o sea $f(x)=x^2, x \in \Re^+$. Esta nueva función es inyectiva pues $x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$ si $x_1, x_2 \in \Re^+$.

**Ejemplo 34.** Determinar si la función $g(x) = 1 - x^3$ es o no inyectiva.

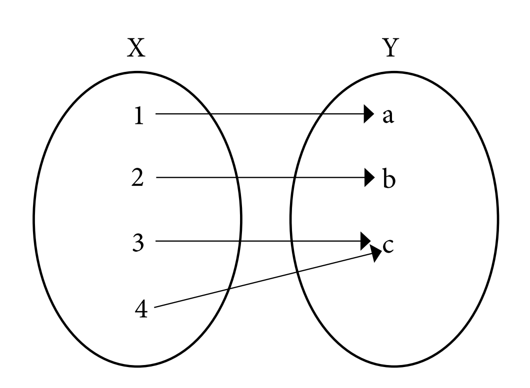
Resolución: Primero elaboramos una tabla de pares ordenados y luego graficamos.

| $x$ | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 9 | 2 | 1 | 0 | −7 |



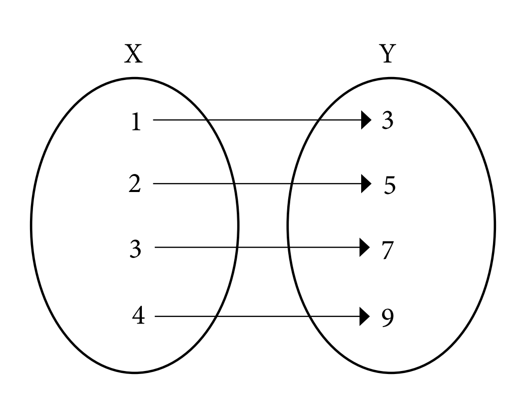

En la gráfica se observa que las líneas horízontales rojas sólo cortan la gráfica en un punto. Esto indica que las $y$ (las imagenes) no se repiten.
Por lo tanto, la funcipon es inyectiva.
En general la función cúbica $y=x^3$ es inyectiva.

Una función $f : X \rightarrow Y$ es ***sobreyectiva*** (o **suprayectiva** ) si está aplicada sobre todo el contradominio, es decir, cuando el conjunto imagen es $Y$. Mas formalmente: **Una función $f : X \rightarrow Y$ es sobreyectiva cuando todo elemento $y \in Y$ es imagen de algún elemento del dominio, es decir existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$.**



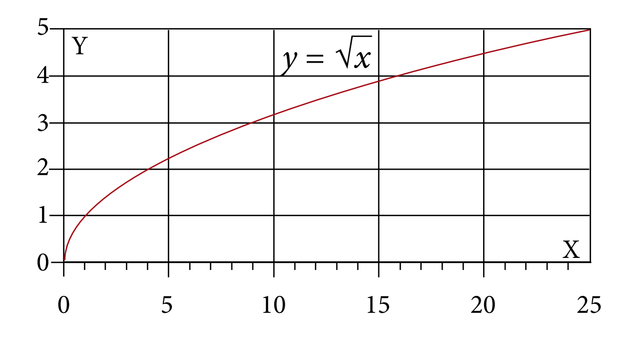
Finalmente una función $f: X \rightarrow Y$ es biyectiva si es al mismo tiempo inyectiva y sobreyectiva. Dicho de otra manera, una función $f: X \rightarrow Y$ es biyectiva si y sólo si para cada

$y \in Y$ existe un único $x \in X$ tal que $y = f(x)$.




Observa que para que una función sea biyectiva debe salir una y sólo una flecha de cada uno de los elementos del ***Dominio*** e ir a parar a distintos elementos del ***Conjunto imagen***. O sea, no pueden quedar ningún elemento tanto del dominio como del conjunto imagen sin pareja.

**Ejemplo 35:** Determina que la función es biyectiva. $y = \sqrt{x}$ ; $f: \Re^+ \rightarrow \Re^+$

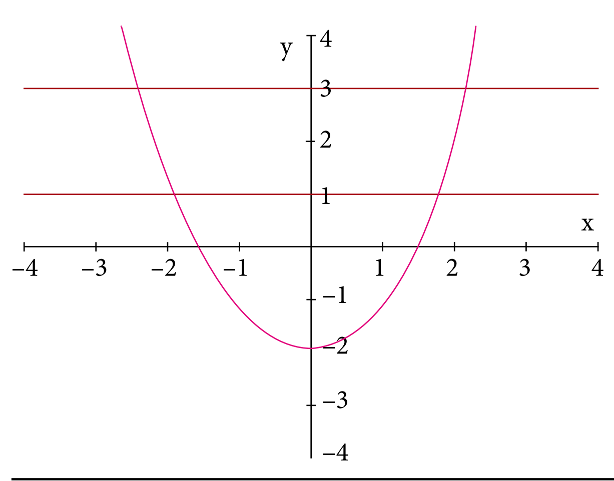



**Resolución:** La función es inyectiva por qué si $x_1 \neq x_2$ en su dominio, necesariamente se cumple $f(x_1) \neq (x_2)$, y además, todos los elementos del contradominio son imagen de un único elemento del dominio razón por la cual también es sobreyectiva, en conclusión (de su gráfica se observa fácilmente que) es biyectiva.

**Ejemplo 36.** Determinar si $f(x) = x^2 - 2$, definida en $f: \Re \rightarrow \Re$, es biyectiva.

**Resolución:** Primero elaboramos una tabla de pares ordenados y luego graficamos.

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $2$ | $-1$ | $-2$ | $-1$ | $2$ |




En la gráfica se observa que las líneas horizontales rojas cortan la gráfica en más de un punto. Esto indica que las y se repiten. Por tanto, la función no es inyectiva, y por ende, tampoco es biyectiva. Sin embargo, si definimos su contradominio como igual al conjunto imagen, entonces se transforma en una función sobreyectiva.

**Ejemplo 37:** Del ejemplo anterior es fácil verificar que la función real de variable real $f:\Re\to\Re$, dada por $f(x) = x^2 - 2$ no es inyectiva (ni tampoco biyectiva), puesto que en general $x \neq -x$ y $f(x) = f(-x)$. Pero si el dominio se restringe a los números reales positivos, y el contradominio a los reales mayores o igual a $-2$, obteniendo así una nueva función $g:\Re^+ \to \{y \in \Re \ / \ y \geq -2\}$, entonces, sí se obtiene una función inyectiva, y además sobreyectiva, o sea, una función biyectiva.

***Función inversa***

***Todas las funciones biyectivas tienen la importante propiedad de tener una función inversa. Intuitivamente consideramos que una función $g$ es función inversa de otra función $f$ si $g$ anula la operación realizada por $f$.***

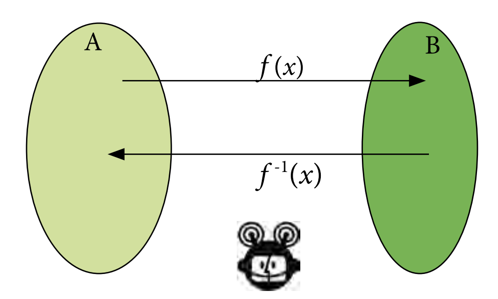
**Ejemplo 38.** Si una función $f:\Re^+\to\Re^+$ consiste en elevar al cuadrado y otra función $g:\Re^+\to\Re^+$ consiste en extraer la raíz cuadrada, entonces:

$$x \to x^2 \to \sqrt{x^2} = x \qquad\qquad x \to \sqrt{x} \to (\sqrt{x})^2 = x$$

Como se observa, cada una neutraliza lo que hace la otra. Por tanto, las funciones $f$ y $g$ son una inversa de la otra. De donde se infiere que, ***dos funciones $f$ y $g$ son inversas si su composición es la función identidad:***

$$(f \circ g)(x) = x \qquad y \qquad (g \circ f)(x) = x$$

Se acostumbra representar la inversa de $f$ como $f^{-1}$, la cual no hay que confundir con la función reciproca de $f$.




$f(x)$ es una función y $f^{-1}(x)$ es su inversa

En resumen, la figura 1.30 ilustra que cuando una función es inyectiva se puede definir otra función que asigna a cada elemento de la imagen el único elemento del dominio al que corresponde. Esta función se llama **función inversa** de la dada y se denota $f^{-1}$.

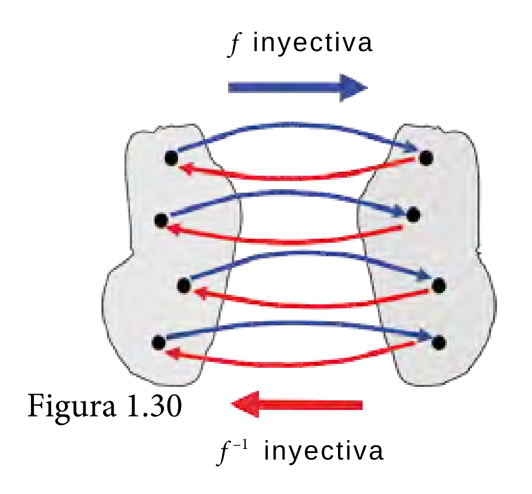



Figura 1.30

En la figura 1.30 se hace evidente que para cada elemento del dominio de $f$ si aplicamos $f$ y después $f^{-1}$ volvemos al mismo elemento, es decir:

$(f^{-1} \circ f)(x)=x$, para todo $x \in$ *Domf.*

Igualmente:

$(f \circ f^{-1})(x)=x$, para todo $x \in$ Im*f.*

La función que a cada elemento de un conjunto A asocia el mismo elemento se llama Identidad de A y se denota $id_A$, entonces podemos definir qué:

> **Para toda función $f$ inyectiva existe otra función $f^{-1}$, $f^{-1}$: Im$f \rightarrow Domf$, tal que $f^{-1} \circ f = id_{Domf}$, $f \circ f^{-1} = id_{\text{Im}f}$ esta función es la función inversa de $f$.**
>
> **Recíprocamente toda función $g$ : Im$f \rightarrow Domf$ que satisface las dos condiciones $g \circ f$: $id_{Domf} \rightarrow f \circ g$: $id_{\text{Im}f}$ , es la inversa de $f$, es decir: $g=f^{-1}$.**

Si intercambiamos las coordenadas de los pares ordenados de una función obtendremos así una nueva relación que tal vez sea también función. Analicemos esta situación en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 39.** Sea la función: $f = \{(1, 2), (2, 4), (3, -1), (4, -2)\}$ y observemos qué pasa si llamando $g$ al conjunto que resulta de intercambiar las coordenadas.

**Resolución:** Después de hacer el intercambio tendremos que: $g = \{(2, 1), (4, 2), (-1, 3), (-2, 4)\}$, y por definición de función se concluye que $g$ es una nueva función.

Sin embargo, si ahora la función $f$ es el conjunto de pares ordenados: $f = \{(1, 2), (2, 4), (3, -1), (4, 2)\}$, entonces g sería: $g = \{(2, 1), (4, 2), (-1, 3), (2, 4)\}$, y ahora g no es una función. Pues g(2) no está determinado de forma única; es decir, g no cumple la condición de función. Por tanto, en este caso esto no funciona ya que existen dos pares, (2, 1) y (2, 4), que tienen la misma primera coordenada y la segunda coordenada es distinta.

Ya que en el segundo ejemplo $f(1)=f(4)=2$ y $g(2)=1$ y $g(2)=4$, entonces $g$ no está determinada de forma única; con lo cual $g$ no es una función. Así pues, en el primer ejemplo $f$ es una función biyectiva, mientras que en el segundo ejemplo $f$ no es una función biyectiva.

De donde, cuando se invierten las coordenadas de los pares ordenados de que consta una función biyectiva se obtiene otra función que es su función inversa. En general sólo tienen inversas las funciones biyectivas.

***Teorema 1:*** *Si $f$ es una función biyectiva, entonces su función inversa $f^{-1}$ existe y también es biyectiva.*

Por ejemplo, la función $f(x)=6x+9$ es biyectiva. Luego, su función inversa $f^{-1}(x)=\frac{x-9}{6}$ también lo es.

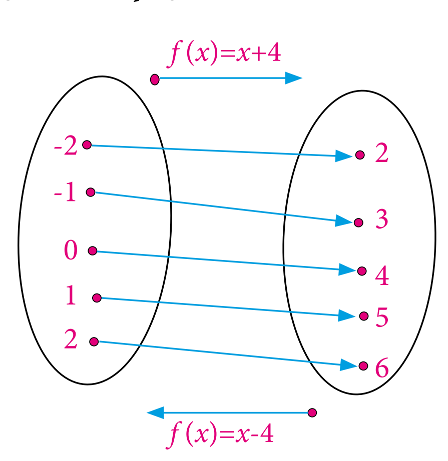
***Método algebraico para determinar la función inversa:***

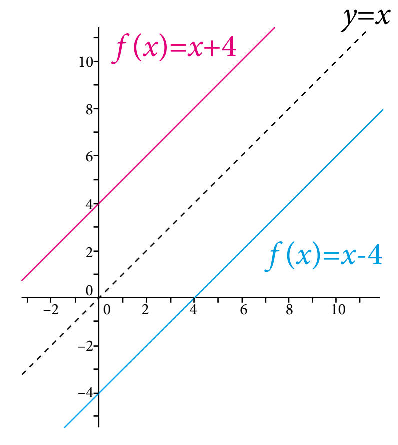
**Primero)** Se intercambian la $x$ y la $y$ en la expresión inicial: $y=f(x) \to x=f(y)$

**Segundo)** Se despeja la $y$ en la nueva expresión: $x=f(y) \to y=f^{-1}(x)$

**Ejemplo 40:** Determinar la función inversa de $y=x+4$.

**Resolución:** Primero cambiamos la $x$ por la $y$, nos queda entonces, $x=y+4$. Segundo, despejamos la $y$, y se obtiene la función inversa $y=x-4$.




En este ejemplo se puede observar que: el dominio de $f^{-1}$ es el contradominio de $f$ y, recíprocamente, el contradominio de $f^{-1}$ es el dominio de $f$. Si queremos hallar el contradominio de una función tenemos que hallar el dominio de su función inversa. Además, de las gráficas se observa que $f$ y $f^{-1}$ son simétricas respecto a la función identidad (la recta) $y=x$.

**Ejemplo 41:** Dada la función $f: \Re \to \Re$, $f(x) = x^3$ determina su función inversa.

**Resolución.** Sabemos que $f$ es inyectiva, luego existe la función inversa. Esta función inversa hace corresponder a cada elemento de la imagen el único elemento del dominio al que corresponde, por tanto, el dominio de la inversa es la imagen de $f$; como la imagen de $f$ es todo $\Re$, el dominio de la inversa debe ser $\Re$.

Por la condición de que a cada elemento de la imagen asocia su preimagen, debemos encontrarla para cada elemento de la imagen, es decir, en la ecuación $y = f(x)$ debemos encontrar para cada "$y$" el valor de "$x$" que le corresponde. En otras palabras hay que despejar $x$ en la ecuación de la función.

En nuestro caso $y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y}$ y para dar a las variables su papel usual, las intercambiamos de manera que "$x$" siga siendo la variable independiente: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} = y$ .

Al expresar "$x$" en términos de "$y$" no se altera en nada el gráfico de la función, los pares ordenados siguen siendo los mismos; sin embargo, cuando cambiamos de lugar las variables, cambiamos cada par ordenado por su simétrico:$(x,y) \to (y,x)$, esto significa que reflejamos el gráfico en la recta $y=x$ (figura 1.31).

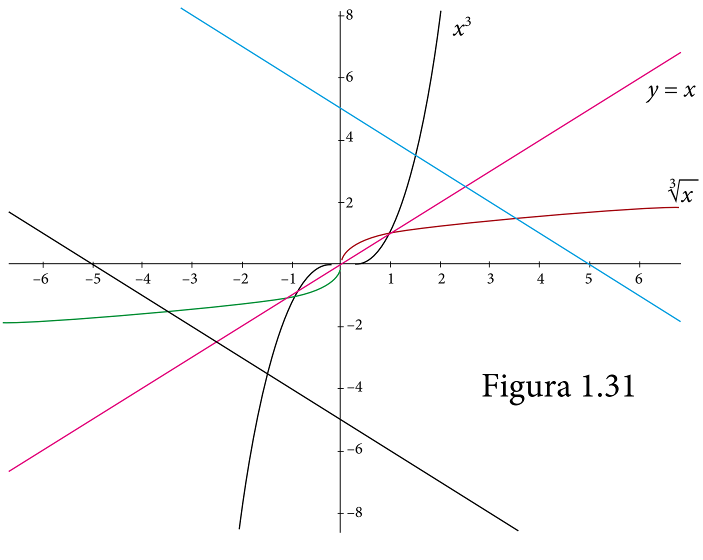


Figura 1.31

**Con esto argumentamos que el gráfico de una función y el de su inversa son simétricos respecto a la bisectriz del primer cuadrante.**

En la figura 1.31 aparece el gráfico de la función $y = x^3$ el de su inversa $y = \sqrt[3]{x}$ , también el de la bisectriz del primer cuadrante $y=x$ y dos rectas (escogidas al azar) perpendiculares a la bisectriz, para ilustrar que los gráficos son simétricos respecto a ella.

Es importante notar que la inversa de $y = x^3$ no es $y = x^{\frac{1}{3}}$, porque esta última función sólo está definida en $\Re^+$ y la inversa de $y = x^3$ debe estar definida en $\Re$, en cambio $y = \sqrt[3]{x}$ está definida para todos los números reales, pues representa la raíz cúbica principal del número y esta siempre existe.

**Ejemplo 42:** Analiza si las siguientes funciones tienen inversa y determinarlas en cada caso.

**a)** $y=\dfrac{2x+1}{x+3}$ **b)** $f(x)=\sqrt{x-3}-1$ **c)** $h(x)=\sqrt{1-x^2}$

**Resolución:**

a) Para determinar si tiene inversa hay que determinar si es inyectiva o no. Una forma cómoda de hacerlo es expresar "$x$" en términos de "$y$" para ver cuántos elementos del dominio corresponden a cada elemento de la imagen:

$y(x+3) = 2x + 1 \Rightarrow yx + 3y=2x+1$ que conduce a: $yx-2x=1-3y \Rightarrow (y-2)x \Rightarrow 1-3y$

que equivale, si $y\neq 2$, a $x=\dfrac{1-3y}{y-2}$ , es decir, a cada elemento de la imagen distinto de 2 corresponde un único elemento del dominio, luego es inyectiva. Como todas las transformaciones han sido equivalentes, la expresión obtenida define la función inversa sin precisiones adicionales.

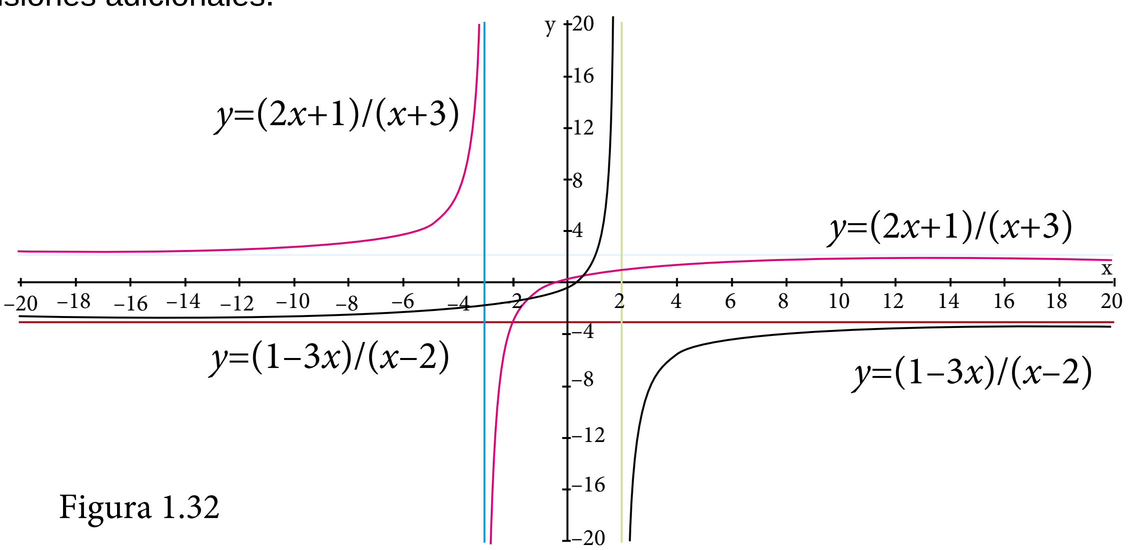


Figura 1.32

Intercambiando las variables para que ocupen el papel usual tenemos que la inversa es $y=\dfrac{1-3x}{x-2}$ . La función y su inversa se representan en la figura 1.32, en ella se puede apreciar que las gráficas son simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante, en particular las asíntotas de una de las funciones son simétricas respecto a esa recta de las asíntotas de la otra.

b) Escribimos $y=f(x)=\sqrt{x-3}-1$ y procedemos como en a).

$$y=f(x)=\sqrt{x-3}-1 \Rightarrow (y+1)^2=x-3$$

luego $x=3+(y+1)^2$ esto muestra que a cada valor de "$y$" corresponde un único valor de "$x$", luego la función es inyectiva, pero en este caso las transformaciones no han sido todas equivalentes y se han introducido raíces extrañas. La inversa está definida entonces sobre la imagen de la función, es decir, para $y\geq -1$. Intercambiando las variables queda:

$$f^{-1}(x)=3+(x+1)^2,\quad Dom f^{-1}=[-1,\infty).$$

c) En este caso $y=h(x)=\sqrt{1-x^2}$ y resulta $y=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow y^2=1-x^2$ que arroja $x^2=1-y^2$, es decir a cada valor de "$y$" corresponden dos valores de "$x$" luego no es inyectiva y no tiene inversa.

Al despejar "$x$" en esa ecuación obtenemos $x=\pm\sqrt{1-y^2}$ esto muestra que el dominio puede limitarse para obtener un único valor si escogemos uno de los signos de la solución, esto equivale a limitar el dominio a valores positivos o negativos. Luego la función $y=\sqrt{1-x^2}$ con $x \in [0,1]$ tiene inversa $y=\sqrt{1-x^2}$ con $x \in [0,1]$, es decir, es su propia inversa. A su vez la función $y=\sqrt{1-x^2}$ tiene inversa con $x \in [0,1]$.

**Ejemplo 43.** Determinar la función inversa y reciproca de: $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$ ; $x \neq 1$.

**Resolución:** Para $x \neq 1$, para cada $x$ del dominio corresponde una imagen única del contradominio, luego es inyectiva. Aplicando el procedimiento:

$$y=\frac{2x+3}{x-1} \quad ; \quad x=\frac{2y+3}{y-1} \quad \Rightarrow \quad x(y-1)=2y+3 \quad \Rightarrow \quad xy-x=2y+3$$

$$\Rightarrow \quad x(x-2)=x+3 \quad \Rightarrow y=\frac{x+3}{x-2} \quad \therefore \quad f^{-1}(x)=\frac{x+3}{x-2}$$

**Verificación para $x$=2:** $f(2)=\dfrac{2(2)+3}{2-1}=\dfrac{7}{1}=7 \qquad f^{-1}(7)=\dfrac{7+3}{7-2}=\dfrac{10}{5}=2$

La ***función reciproca*** de ***f*** es: $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{x-1}{2x+3}$.

***ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE:***

**Act-84)** Analiza si las siguientes funciones tienen inversa y si la tienen determínala.

a) $y=8x-5$ b) $f(x)=\dfrac{3x-1}{x+4}$ c) $f(x)=3x^2+1$ d) $y=(x-1)^3$

e) $y=|x|$ f) $y=x^2-3x+5$ g) $y=\sqrt{x-5}$ h) $y=x+\sqrt{x-1}$

i) $y=\dfrac{2x-1}{3x+7}$ j) $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ k) $y=\cos x$ l) $y=\operatorname{sen} x$

**Act-85)** Si una función $f$ tiene función inversa, ¿a qué será igual $(f^{-1}(x))^{-1}$, o sea, la función inversa de la función inversa?

***Clasificación de las funciones elementales***

Aunque las funciones elementales se pueden clasificar de diferentes maneras según sus propiedades y formas, antes de continuar con su análisis resulta conveniente hacer la siguiente clasificación según las operaciones presentes en las mismas.

Ya en el curso de Matemáticas IV estudiaste que las funciones elementales se clasifican en funciones algebraicas y funciones trascendentes. Las funciones algebraicas se clasifican a su vez en polinomiales, racionales e irracionales. Mientras que las funciones trascendentes se clasifican a su vez en trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.

- Funciones
  - Algebraicas
    - Polinomiales. **Ejemplos:** $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 6x^2 - x + 5$
    - Racionales. **Ejemplos:** $g(x) = \dfrac{3x+7}{x-1}$ ; $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x-2}$
    - Irracionales. **Ejemplos:** $h(x) = \sqrt{x-10}$ ; $y = x^2 + \sqrt{x}$
  - Trascendentes
    - Trigonométricas. **Ejemplos:** $y = \cos x + \text{sen } x$; $y = \tan 3x$
    - Logarítmicas. **Ejemplos:** $y = \log(x+9)$; $y = \ln x$
    - Exponenciales. **Ejemplos:** $y = 5^x + 1$ ; $y = 3e^{2x}$

Existen otras formas o criterios para clasificar las funciones. Por ejemplo, según que la variable dependiente esté despejada o no las ***funciones pueden ser explícitas*** e ***implícitas.*** Por lo cual una función es implícita cuando la variable dependiente no está despejada, por ejemplo $y - 3x + 2 = 0$, y en caso contrario se le llamará explícita, por ejemplo $y = 3x - 2$. O según su comportamiento variacional las funciones también se pueden clasificar en funciones continuas, discontinuas, crecientes, decrecientes, etc.

***Funciones algebraicas: definición, análisis y graficación***

Una función algebraica es aquella cuya variable independiente ($y$) se obtiene combinando un número finito de veces la variable dependiente ($x$) y constantes reales por medio de operaciones algebraicas de suma, resta, multiplicación, división, elevación a potencias y extracción de raíces. O sea:

> Las funciones algebraicas son aquellas cuya regla de correspondencia viene dada por un número finito de operaciones algebraicas

***Funciones polinomiales***

Un polinomio de grado n en una variable es una expresión del tipo:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

en la que $x$ es una variable que puede tomar cualquier valor real y los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n \neq 0$ son números reales fijos (constantes).

De donde, cada polinomio permite definir una función *de* $\Re$ en $\Re$ que asocia a cada número real el valor que se obtiene al sustituir en el polinomio $x$ por ese número real. Ejemplos de funciones de este tipo son:

- La función lineal $f(x) = ax + b$
- Las funciones cuadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$
- Las funciones potenciales de exponente natural $f(x) = x^n$

Para todas ellas el dominio es $\Re$, lo mismo es válido para cualquier función polinomial pues están definidas para todos los números reales. Así pues:

**Una función polinomial de grado $n$ es una función definida por una correspondencia de la forma:**

$$x \to f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

**con $x \in \Re$ y $a_i \in \Re$ con $i = 0, \ldots,$ . $a_n \neq 0$ . Dom $f = \Re$**

**Ejemplo 44:** ***Analiza la función*** $f(x) = 2x^3 + x^2 + 1$.

**Resolución:**

Para facilitar el análisis representamos el gráfico en la figura 1.33:

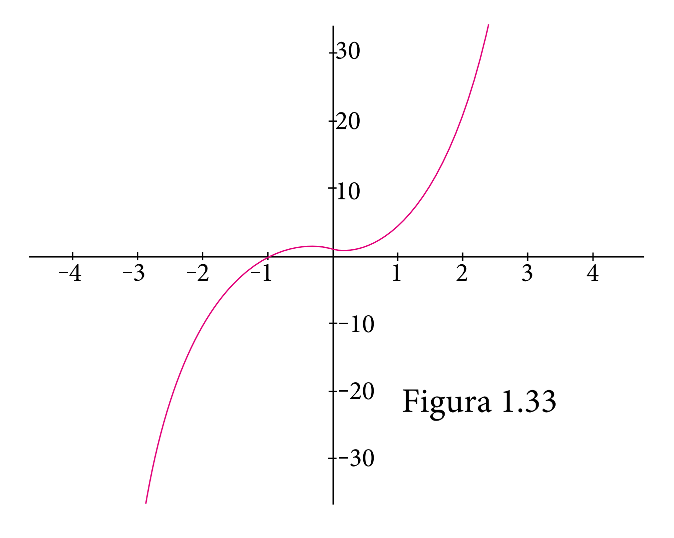


Figura 1.33

Además escribimos la ecuación en la forma $f(x) = x^3\left(2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)$

**Dominio:** $\Re$

**Imagen:** Como las funciones potenciales de exponente negativo se hacen arbitrariamente pequeñas cuando la variable tiende a infinito para valores muy grandes la función se comporta como $x^3$ y su imagen es $\Re$

**Ceros:** La función se puede escribir $f(x) = (x+1)\,(2x^2 - x + 1)$ y el polinomio cuadrático no tiene ceros reales, luego tiene un único cero $x = -1$.

No tiene máximos ni mínimos y no es ni par ni impar.

El análisis realizado para encontrar la imagen permite asegurar que en el infinito se comporta como $x^3$, luego $f(x) \xrightarrow[x\to -\infty]{} -\infty$ y $f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty$. Esto significa que la función pasa de -∞ a + ∞ y, por tanto, debe cortar al eje "X", es decir, debe tener al menos un cero. Un razonamiento análogo es válido para todas las funciones polinomiales de grado impar.

| Toda función polinomial de grado impar tiene al menos un cero |
|---|

**Ejemplo 45: Analiza la función** $f(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x + 6$.

**Resolución:** Mediante un procesador se obtiene la representación gráfica de la función que aparece en la figura 1.34.

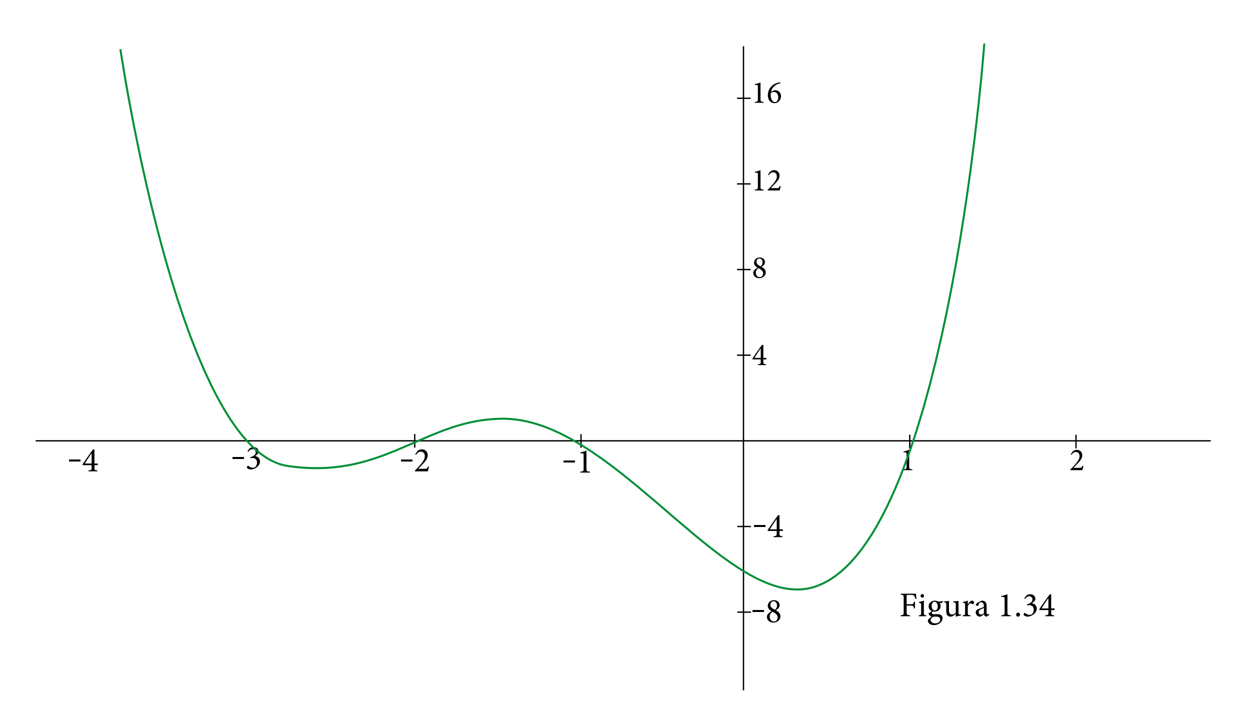


Figura 1.34

Sabemos que el dominio es todo $\Re$, la imagen no lo es, no es de grado impar sino par, las funciones polinomiales de grado par tienen imagen $\Re^+$, la determinación de la imagen en el gráfico no es muy exacta, aparentemente es $[-6, \infty)$. Posteriormente desarrollaremos herramientas que nos permitirán obtener mayor precisión por métodos analíticos.

En el gráfico vemos que los ceros son $\{-3 , -2 , -1 , 1\}$ lo que comprobamos descomponiendo en factores el polinomio:

$$x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x + 6 = (x+3)(x+2)(x+1)(x-1)$$

En el gráfico apreciamos que la función aparenta tener un máximo entre -2 y -1 y dos mínimos uno entre -3 y -2 y el otro entre 0 y 1. Esto lo ratificamos si notamos que debido a que la gráfica es un trazo continuo (sin saltos) entre dos ceros debe haber un máximo o un mínimo.

Los recursos para la determinación exacta de estos puntos los estudiaremos posteriormente en la siguiente unidad de aprendizaje. Sin embargo, desde la gráfica se observa que aproximadamente el punto de máximo es $(x=-1.4, y=0.9)$ ; igualmente los puntos de mínimo son $(x=-2.6\ ,\ y=-1.4)$ y $(x=0.3\ ,\ y=-7)$.

Para el comportamiento en el infinito escribimos: $f(x)= x^4\left(2+\frac{5}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{5}{x^3}-\frac{6}{x^4}\right)$

Aquí se puede apreciar que para valores grandes de $x$ la función se comporta como $x^4$ ya que las funciones potenciales de exponente negativo se aproximan a cero. Resulta entonces $f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}+\infty$ y $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$.

Al analizar la monotonía nos percatamos que esta función cambia varias veces de creciente a decreciente o viceversa y por eso hay que distinguir los intervalos en los que es monótona, estos intervalos van de un máximo a un mínimo o viceversa; como al tender $x$ a $-\infty$ tiende $y$ a $+\infty$ la función decrece hasta el primer mínimo, luego la función es:

**Decreciente** en los intervalos $(-\infty\ ,\ -2.6]$ y $[-1.4\ ,\ 0.3]$

**Creciente** en los intervalos $[-2.6\ ,\ -1.4]$ y $[0.3\ ,+\ \infty]$

Los ejemplos 44 y 45 que has estudiado permiten inferir que:

***Las funciones polinomiales se comportan en el infinito como la función potencia del término de mayor grado del polinomio que la define.***

**Ejemplo 46: Analiza la función** $f(x)= -x^4 + 8x^2 - 16$.

**Resolución.** Comenzamos por visualizar las propiedades mediante el trazado del gráfico en la figura 1.35.

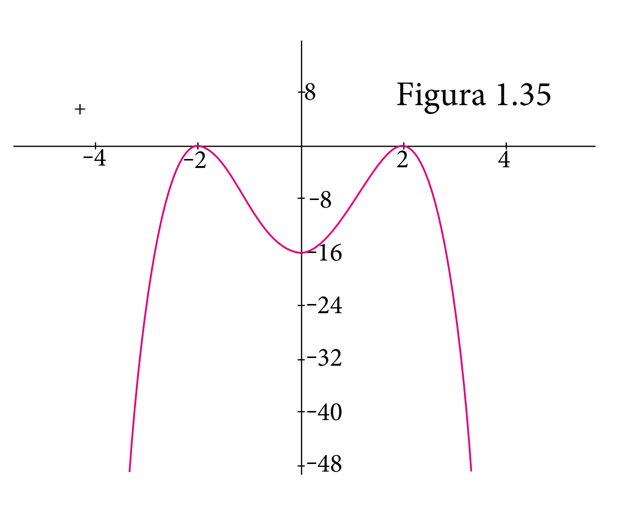


Figura 1.35

$\text{Dom} f = \Re$ y para la imagen rescribimos la función en la forma $f(x)=-(x^2-4)^2$ y vemos que siempre $f(x) \leq 0$, como para $x = \pm 2$, $f(x)=0$ resulta $\text{Im} f = \Re^-$ Para los ceros resulta $(x^2-4)^2=(x-2)^2(x+2)^2$ y hay dos ceros dobles $+2$ y $-2$.

Esta función en el infinito se comporta como su término de mayor grado $-x^4$, luego $f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}-\infty$ y $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}-\infty$

Es par, pues $f(-x)= -((-x)^2 - 4)^2 = -(x^2 - 4)^2 = f(x)$.

El gráfico sugiere que la función tiene dos máximos absolutos en +2 y -2; en efecto, son máximos absolutos porque son los ceros de la función y esta es menor o igual que cero en todo su dominio. Como la función no tiene "saltos" entre los dos máximos debe tener un mínimo, el gráfico sugiere que ese mínimo es para $x$=0 y el valor mínimo es -16.

Para analizar si en $x$=0 hay un mínimo, analizamos la inecuación $f(x)-(-16) \geq 0$ y si es un mínimo la solución incluye un intervalo que contiene al cero:

$$f(x)-(-16)= -(x^2-4)^2-(-16)= 16-(x^2-4)^2 = (4+(x^2-4))(4-(x^2-4)) = x^2(8-x^2)$$

y entonces $f(x)-(-16) \geq 0 \Leftrightarrow (8-x^2) \geq 0$ ,luego, $x^2(x^2-8) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \left(x-\sqrt{8}\right)\left(x+\sqrt{8}\right) \leq 0$ que tiene como solución el intervalo $\left[-\sqrt{8}, \sqrt{8}\right]$ que contiene al cero, luego en efecto en $x$=0 hay un mínimo local o relativo, en este caso no es absoluto, cuando $|x| > \sqrt{8}$ la función toma valores menores que -16.

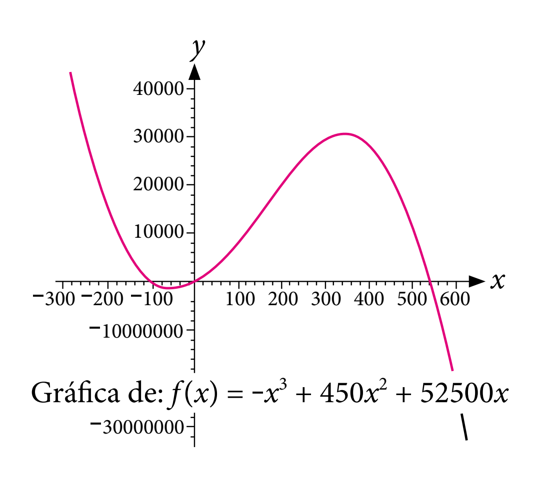
Cuando $x \to \pm\infty$ el valor de la función tiende a menos infinito ($y \to -\infty$), y la función cambia la monotonía en los extremos, entonces es:

**Creciente** en $(-\infty,-2]$ y $[0,2]$ **Decreciente** en $[-2,0]$ y $[2, \infty)$

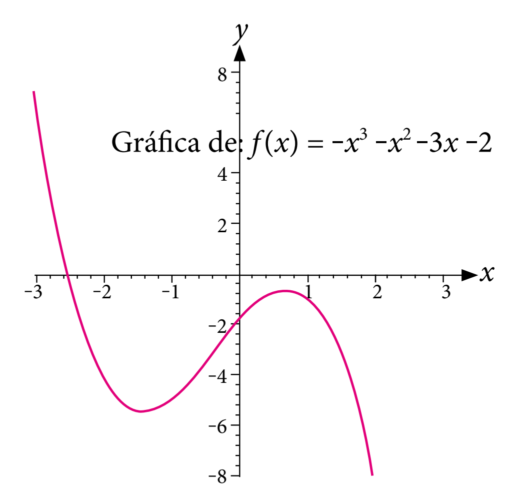
Como se observa en los ejemplos, una función polinomial puede considerarse como una suma de funciones cuyos valores son del tipo $ax^n$, donde el coeficiente es un número real y $n$ es un entero no negativo. Todas las funciones polinomiales tienen como dominio al conjunto de números reales $\Re$, pero su rango o conjunto imagen varía dependiendo del tipo de función que sea.

Desde las funciones polinomiales cúbicas te habrás dado cuenta que para hacer un análisis completo de las gráficas de funciones polinómicas de grado mayor que 2 se requieren métodos más sofisticados, pues a medida que el grado aumenta, la gráfica es más complicada.

Sin embargo, como vemos en las gráficas siguientes su apariencia siempre es la de una curva suave o continua, sin interrupciones, sin esquinas, huecos o saltos y con algunas "cimas" (valores máximos) y "valles" (valores mínimos) que pueden aparecer en gran cantidad si el grado es elevado, como quedó de manifiesto en el ejemplo 45.



Gráfica de: $f(x) = -x^3 + 450x^2 + 52500x$



Gráfica de: $f(x) = -x^3 - x^2 - 3x - 2$

Un elemento clave en la graficación de una función polinomial lo constituye la obtención de los interceptos con los ejes; en particular, los interceptos con el eje X. Para obtener éstos últimos debemos resolver la ecuación polinómica correspondiente, recurriendo a los métodos de factorización, división sintética y el teorema del factor.

**Ejemplos** de funciones polinomiales ya factorizadas aplicando dichos métodos:

1. La función $f(x) = x^3 + 6x^2 + 10x + 8 = (x + 4)(x^2 + 2x + 2)$ tiene un intercepto con el eje X en $(-4,0)$ y un intercepto con el eje $y$ en $(0,8)$ (ver gráfica 1 de la figura 1.36).

2. La función $f(x) = 2x^4 - x^3 - 19x^2 + 9x + 9 = (x + 3)(2x + 1)(x - 1)(x - 3)$ tiene cuatro interceptos con el eje $x$: en en $x = -3$ , $x = -0.5$ , $x = 1$ y $x = 3$, y un intercepto con el eje Y: $(0,9)$ (ver gráfica 2 de la figura 1.36).

3. La función $f(x) = 4x^6 - 24x^5 + 45x^4 - 13x^3 - 42x^2 + 36x - 8 = (x+1)(2x-1)^2 (x-2)^3$ tiene tres interceptos con el eje $x$: en $x = -1$, $x = 0.5$ y $x = 2$, y un intercepto con el eje Y en $(0,-8)$ (ver gráfica 3 de la figura 1.36).

4. La función $f(x) = 3x^5 - 19x^4 + 16x^3 + 70x^2 - 100x + 48 = (x + 2)(x - 3)(x - 4)(3x^2 - 4x + 2)$ tiene tres interceptos con el eje $x$: en $x = -2$, $x = 3$ y $x = 4$, y tiene un intercepto con el eje Y en $(0,48)$ (ver gráfica 4 de la figura 1.36).

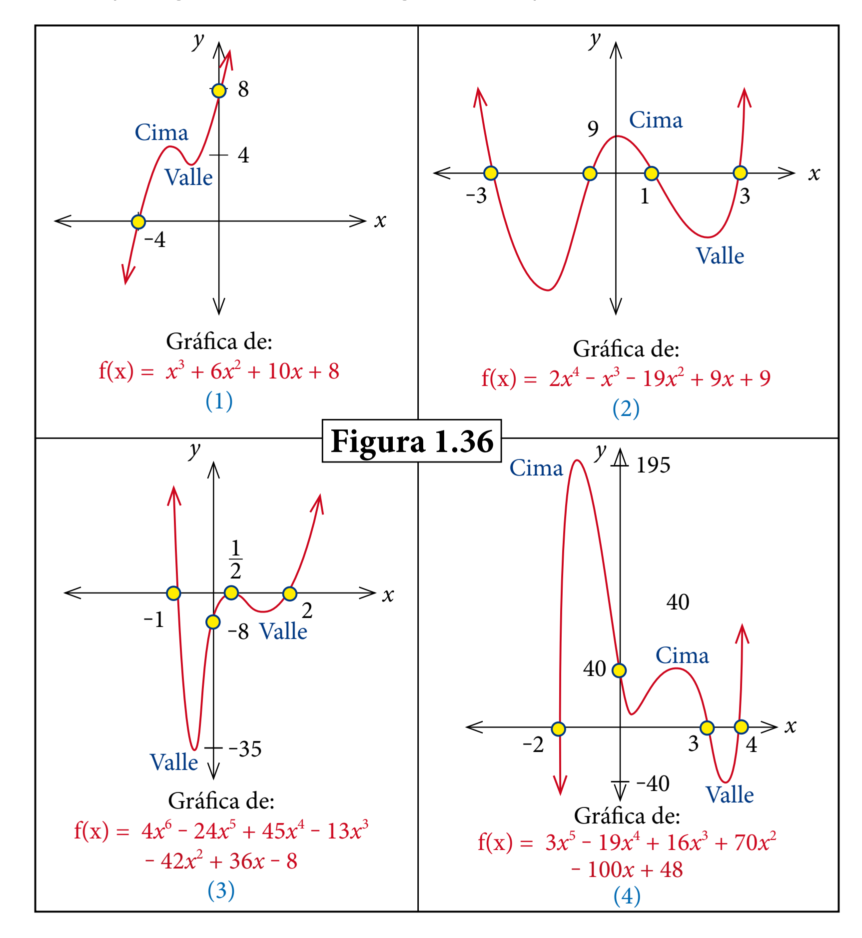


Figura 1.36

Así, pues, para graficar funciones polinomiales, especialmente las de grado superior, además de una tabulación, es conveniente determinar sus interceptos con los ejes y para ello necesitamos resolver sus ecuaciones polinómicas correspondientes. Por lo tanto a continuación repasamos algunos aspectos ***básicos de la teoría de resolución de ecuaciones polinómicas***, tales como la ***División Sintética y el Teorema del Factor.***

La división sintética es un método rápido que sirve para dividir un polinomio en $x$ entre un binomio de la forma $x - a$. El ***Algoritmo de la división sintética*** es el siguiente:

**Paso 1**: En la primera línea se escriben los coeficientes $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}...a_1, a_0$ del polinomio dividendo en orden decreciente de las potencias de $x$. Si falta alguna potencia de $x$, se escribe cero en el lugar que le corresponde. Al final de la línea se escribe el número "$a$" del divisor $x - a$.

**Paso 2:** Se escribe el coeficiente principal $a_n$ del dividendo como primer término de la tercera línea.

**Paso 3:** Luego se multiplica $a_n$ por "$a$" y el resultado se escribe como primer término de la segunda línea. Después se suma $a_{n-1}$ con el producto $a_n \cdot a$ y el resultado $(a_{n-1} + a_n \cdot a)$ se escribe como segundo término en la tercera línea.

**Paso 4:** Luego se multiplica el segundo término de la tercera línea por "$a$" y el resultado se escribe como segundo término de la segunda línea. Después se suma $a_{n-2}$ con el producto anterior y el resultado se escribe como tercer término en la tercera línea.

**Paso 5:** Se continúa de esta manera hasta que se usa como sumando el último coeficiente del dividendo, o sea $a_0$. Y el resultado de esta suma se escribe como último término de la tercera línea.

**Paso 6:** Finalmente se obtiene el resultado con los números de la tercera línea: el último número de la tercera línea es el residuo, y los números anteriores a él son los coeficientes correspondientes a las potencias descendentes del cociente.

**Ejemplo 47:** Dividir $P(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 2$ entre $(x + 1)$.

**Resolución por el método convencional:**

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 2x + 2 \\
\hline
x+1 & x^3 + 3x^2 + 4x + 2 \\
 & -x^3 - x^2 \\
\hline
 & 0 + 2x^2 + 4x + 2 \\
 & -2x^2 - 2x \\
\hline
 & 0 \quad + 2x + 2 \\
 & -2x \quad -2 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

**Resolución por división sintética:**

Coeficientes de $P(x)$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
1 & +3 & +4 & +2 & -1 = a \\
 & -1 & -2 & -2 & \\
\hline
\boxed{1} & \boxed{+2} & \boxed{+2} & \boxed{0 = r} &
\end{array}
$$

Cociente: $c(x) = x^2 + 2x + 2$

Residuo: $r = 0$

**Ejemplo 48:** por división sintética dividir $P(x) = 3x^5 - 38x^3 + 5x^2 - 1$ entre $x - 4$.
**Resolución:**



Coeficientes de $p(x)$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | $+0^*$ | $-38$ | $+5$ | $+0^*$ | $-1$ | $4 = a$ |
| ↓ | $+12$ | $+48$ | $+40$ | $+180$ | $+720$ | |
| 3 | $+12$ | $+10$ | $+45$ | $+180$ | $+719 = r$ | |

$\therefore$ Cociente: $c(x) = 3x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 45x + 180$ Residuo: $r(x) = 719$

Al igual que sucede con los números enteros, en los polinomios también se cumple que si el polinomio $c(x)$ es factor del polinomio $p(x)$, entonces $p(x)$ es divisible entre $c(x)$. Además, que $p(x)$ sea divisible entre $c(x)$ implica que el residuo de esta división es igual a cero.

De los ejemplos anteriores se observa que en el ejemplo 47 el polinomio dado $P(x)=x^3+3x^2+4x+2$ es divisible por el polinomio $(x+1)$, ya que el residuo que resulta de su división es cero. Mientras que en el ejemplo 48, el polinomio dado $P(x)=3x^5-38x^3+5x^2-1$ no es divisible por el polinomio $x-4$, ya que al dividirlos se obtiene el residuo $r=719$ el cual es diferente de cero.

De igual manera, ya que: $x^4-16 = (x^2+4)(x^2-4) = (x^2+4)(x+2)(x-2)$, entonces: $x^4-16$ es divisible entre $(x^2+4)$ , $(x^2-4)$ , $(x+2)$ y $(x-2)$.

En los ejemplos 47 y 48 resueltos anteriormente también puedes verificar respectivamente que se cumple lo siguiente:

$$(x^3+3x^2+4x+2) = (x^2+2x+2)(x+1) + 0$$

$$x^5 - 38x^3 + 5x^2 - 1 = (3x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 45x + 180)(x-4) + 719$$

O sea que el producto del divisor por el cociente más el residuo es igual al dividendo:

(Dividendo)=(Divisor)(Cociente) + (Residuo)

Este resultado se puede generalizar en el siguiente ***algoritmo de la división para polinomios de una variable:***

**Algoritmo de la división para polinomios de una variable**

Si $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios en $x$, tales que $q(x) \neq 0$ , y el grado de $q(x)$ es menor o igual que el grado de $p(x)$, entonces existen polinomios únicos $c(x)$ y $r(x)$ tales que: $p(x) = q(x)\ c(x) + r(x)$

en donde: el grado de $r(x)$ es cero o menor que el grado de $q(x)$.

En particular, cuando dividimos un polinomio $p(x)$ de grado $n$, por un binomio de la forma $q(x)= x–a$ (de grado 1), se cumple que:

$$p(x) = (x – a)\ c(x)\ +\ r(x)$$

siendo el cociente $c(x)$ de grado $n–1$ y el residuo $r(x)$ un número (de grado cero).

Si $p(x)$ no es divisible por $q(x) = x - a$, entonces $p(x) = (x-a)\ c(x) + r(x)$, y en consecuencia $p(a) = (a - a)\ c(a) + r(a)$. O sea, que para conocer el residuo que resulta de dividir $p(x)$ entre $x - a$, basta evaluar el polinomio en $x = a$, ya que, $p(a) = r(a)$.

Lo anterior se conoce como ***teorema del residuo***, el cual se puede enunciar como:

***Teorema del residuo***

*Si p(x) se divide entre $x$-$a$, entonces, $p(a)$ es el residuo de tal división, o sea $p(a)= r(a)$*

**Ejemplo 49:** Determinar si $p(x) = 2x^3 - 5x + x + 120$ es divisible entre $q(x) = x + 4$.

**Resolución:** Para contestar esta pregunta primero reescribimos $q(x) = x + 4 = x -(-4)$, despues calculamos $p(-4)= 2(-4)^3 -5(-4)^2 +120 = -92$. Por tanto, $p(x)=2x^3 -5x^2+x + 120$ no es divisible entre $q(x) = x + 4$, ya que el residuo $r(-4) = p(-4) = -92 \neq 0$. De donde, por el algoritmo de la división existe $c(x)$ tal que: $2x^3 - 5x^2 + x + 120 = (x+4) \cdot c(x) + (-92)$. ¿Cómo puedes encontrar $c(x)$?

Cuando $p(x)$ es divisible entre $q(x)= x–a$ se tiene que la división es exacta y $r(x)=0$, en consecuencia un polinomio $\boldsymbol{p(x)}$ es divisible por un binomio de la forma $x–a$, si se puede expresar como: $\boldsymbol{p(x) = (x - a)\ c(x)} \Rightarrow p(a) = (a-a)\ c(a) = 0$.

Luego si $p(a) = 0$, entonces $p(x)$ es divisible por un binomio de la forma $x-a$, ó $x-a$ es un factor de $p(x)$. Esto se conoce como ***Teorema del factor***, el cual se puede enunciar como:

***Teorema del factor:*** Si $p(a) = 0$, entonces, $x$-a es un factor de $p(x)$ o $p(x)$ es divisible entre $x$-a

**Nota:** los valores de $x=a$ para los cuales $p(a)=0$ se llaman ceros de $p(x)$ o raíces de la ecuación $p(x)=0$.

**Ejemplos 50: a)** Determinar si $(x - 2)$ es factor de $p(x) = x^3 - 7x + 6$.

**Resolución:**

Como $p(2) = (2)^3 - 7(2)+6=0$, entonces $p(x)$ es divisible entre $(x-2)$, o $(x-2)$ es un factor de $p(x)$. Es decir, $(x^3-7x + 6) \div (x-2)$ es exacta, y el residuo es cero. Esto significa que existe un polinomio de segundo grado $c(x)$ tal que: $p(x) = (x-2) \cdot c(x)$. En este caso también se dice que $x=2$ es un cero de $p(x)$, pues $p(2) = 0$.

De este ejemplo se infiere que la división de polinomios es muy valiosa para factorizar y encontrar los ceros de funciones polinomiales $y = p(x)$.

**b)** Demostrar que $x+1$ es factor de $y = p(x) = x^3 + 3x^2 +4x + 2$.

**Resolución:**

Como $p(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 4(-1) + 2 = -1 + 3 - 4 + 2 = 0$, entonces, de acuerdo con el teorema del factor, $(x+1)$ es factor de $p(x)$. Otro método de resolverlo sería dividir $y=p(x)$ entre $x+1$ y demostrar que el residuo es 0. El cociente de la división sería otro factor de $p(x)$.

**c)** Encontrar un polinomio $p(x)$ de grado 3, que tenga los ceros 2, -1 y 4.

**Resolución:**

De acuerdo con el teorema del factor, $p(x)$ tiene los factores $(x - 2)$, $(x + 1)$ y $(x - 4)$. Así, $p(x) = a(x -2)(x + 1)(x - 4)$, donde $a$ puede ser cualquier valor distinto de cero, y por ende la solución no es única. En particular si $a=1$, y se realiza la multiplicación, se obtiene la solución:

$$p(x) = (1)(x - 2)(x + 1)(x - 4) = (x - 2)(x^2 - 3x - 4)$$
$$= x^3 - 3x^2 - 4x - 2x^2 + 6x + 8 = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$$

**Ejemplo 51:** Graficar y analizar la función polinomial $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

**Resolución:**

Aplicando las ideas anteriores, primero determinaremos sus interceptos con los ejes coordenados X e Y:

**Interceptos $P(0,y)$ con el eje Y:** En estos puntos el valor de las abscisas es $x=0$, por tanto, $f(0) = (0)^4 - 5(0)^2 + 4 = 4$. De donde, en el punto $p(0,4)$ intercepta al eje y.

***Interceptos* $p(x, 0)$ con el eje X:** En estos puntos $y = 0$, por tanto, $x^4-5x^2+4= 0$, resolviendo esta ecuación por factorización tenemos que:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 2)(x + 1)(x - 1) = 0$$

Por tanto los ceros, o raíces, de la ecuación son: $x_1 = -2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1$ y $x_4 = 2$.
Y sus interceptos con el eje $x$ son los puntos:

$$p_1(-2, 0),\ p_2(-1, 0),\ p_3(1, 0),\ p_4(2,0)$$

.

Con los interceptos en el eje X localizados, y aprovechando la continuidad de la función, se puede dividir el dominio de la función $(\text{Dom}\, f\,)$ en los siguientes intervalos de prueba: $\text{Dom}\, f = \Re = (-\infty, -2] \cup (-2, -1] \cup (-1,1] \cup (-1,2] \cup (2, \infty)$, para efecto de determinar el signo positivo o negativo (+ o −) de la función en cada uno de ellos, obviamente no tiene caso considerar los valores de $x_1 = -2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1$ y $x_4 = 2$, pues ya sabemos que para ellos $f(-2) = f(-1) = f(1) = f(2) = 0$.

Por lo tanto, evaluaremos la función para los siguientes valores de $x$ ubicados en cada uno de los intervalos:

$x = -3 \in (-\infty, -2] \quad \Rightarrow f(-3) > 0$
$x = -1.5 \in (-2, -1] \quad \Rightarrow f(-1.5) < 0$
$x = 0 \in (-1, 1] \quad \Rightarrow f(0) > 0$
$x = 1.5 \in (1, 2] \quad \Rightarrow f(1.5) < 0$
$x = 3 \in (2, \infty) \quad \Rightarrow f(3) > 0$

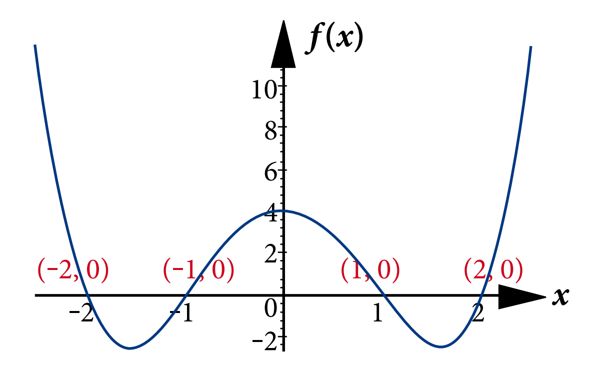



**Figura 1.37**

Ahora se localizan los interceptos con los ejes en un plano cartesiano, después se hace una tabulación de $y = f(x)$ para tener más puntos de la gráfica, de tal manera que entre más puntos se localicen en el plano cartesiano, mayor grado de exactitud tendrá la gráfica trazada. Finalmente se hace un esbozo de la gráfica (tal como se muestra en la figura 1.37) considerando si $f(x) > 0$ o $f(x) < 0$ según los resultados encontrados en la evaluación de $y = f(x)$.

**Tareas extraclase:** (a) Realiza una tabulación para este problema considerando, además de los interceptos, al menos 15 puntos $P(x, y = f(x))$ de la gráfica, y los puntos determinados los localizas en un plano (dado en una hoja milimétrica) y posteriormente los unes con una línea suave o continua. (b) Analiza la función a partir de su gráfica esbozada en la figura 1.37 determinando sus valores máximos y mínimos relativos o locales, y los intervalos donde es creciente o decreciente.

**Nota:** Posteriormente a partir de la unidad de aprendizaje 2 de este texto aprenderás métodos más poderosos y precisos para trazar este tipo de gráficas, y determinar los intervalos de crecimiento o decrecimiento, así como para calcular los valores máximos y mínimos de una función.

***ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE:***

**Act-86)** Determina todos los ceros racionales de las siguientes funciones polinomiales, aproximar los ceros no racionales utilizando de un procesador.

a) $P(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ b) $P(x) = 6x^4 - 13x^3 - 12x^2 - 7x + 6$

**Act-87)** Grafica el par de funciones dadas y determina todos los puntos de intersección, si es necesario auxíliate de un procesador.

a) $f(x) = x^3$ $g(x) = -2x - 2$
b) $f(x) = x^4 - x^3$ $g(x) = x^2 - x$
c) $f(x) = x^3 + 1$ $g(x) = x^4$

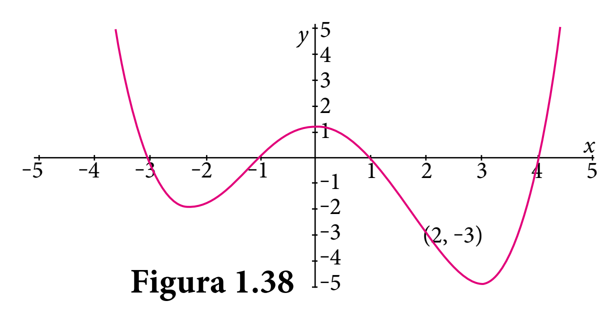



Figura 1.38

**Act-88)** Determina el polinomio $P(x)$ de grado mínimo cuya gráfica pudiera ser la que se ilustra en la figura 1.38.

**Act-89)** Obtén un polinomio $P(x)$ de cuarto grado que tenga ceros en 0 ,1 , 2, -3 y cuyo coeficiente en $x^2$ sea 14.

**Act-90)** Analiza las funciones que aparecen en los incisos siguientes.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 2$ b) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ c) $f(x) = x^4 + 3x^2 + 1$

d) $f(x) = x^5 - x^4 + 2x$ e) $f(x) = x^5 + x^3 + 2x + 1$ f) $f(x) = x^5 - 3x^4 - 5x^2 + x - 1$

**Act-91)** Determina el polinomio de grado mínimo cuya gráfica sea la de la figura 1.39.

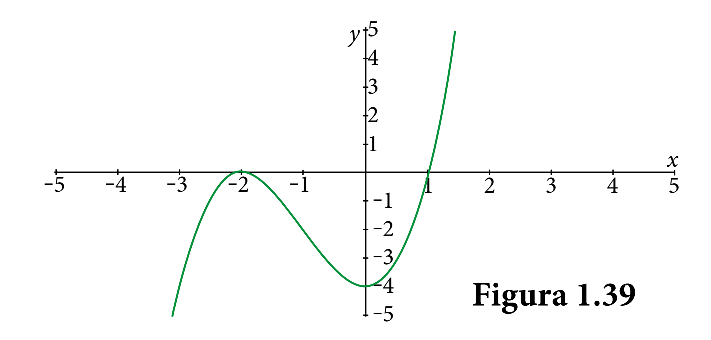



Figura 1.39

**Act-92)** Se dispone de 100 m de cerca para delimitar un terreno rectangular. ¿Cuáles deben ser las dimensiones para que el área sea máxima?

**Act-93)** En una ciudad de 80000 habitantes hay personas que oyen un rumor. El rumor se divulga en la población con una rapidez directamente proporcional al producto de las personas que lo conocen por las personas que no saben de él. Determinar la función que describe el fenómeno y calcula cuando el rumor se propaga con la máxima rapidez.

**Act-94)** Mediante la división sintética determinar el cociente y el residuo de dividir el polinomio:

a) $x^3 - 3x^2 + 2x - 3$ entre $x - 1$
b) $2x^3 + 5x^2 + 2x - 1$ entre $x + 3$
c) $3x^4 - 10x^2 - 1$ entre $x - 2$
d) $x^5 - 5x^3 - 9x$ entre $x - 3$

**Act-95)** Sin efectuar la división, calcular el residuo si se divide:

a) $f(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 4\text{x} - 7$ entre $q(x) = x - 3.$
b) $p\,(x) = 3x^3 - 4x^2 - 2x - 6$ entre $q(x) = x + 2.$
c) $p\,(x) = 7x^5 - 8x^4 - x^2 + 10x - 6$ entre $q(x) = x - 4.$

**Act-96)** Sin efectuar la división demuestre, para los siguientes casos, que:

a) $x - 5$ divide a $p(x) = x^2 - 13x + 40.$
b) $x + 2$ divide a $p(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2.$
c) $x - 3$ divide a $p(x) = x^5 - 3x^4 + x^2 - 2x - 3.$
d) $x - c$ divide a $x^n - c^n$

**Act-97)** Use el teorema del factor, para demostrar que:

a) $x - 8$ es factor (o divisor) de $p(x) = x^2 - 13x + 40.$
b) $x + 2$ es factor (o divisor) de $p(x) = 3x^3 - 4x^2 - 17x + 6.$
c) $x - 3$ es factor (o divisor) de $p(x) = 3x^3 - 4x^2 - 17x + 6.$

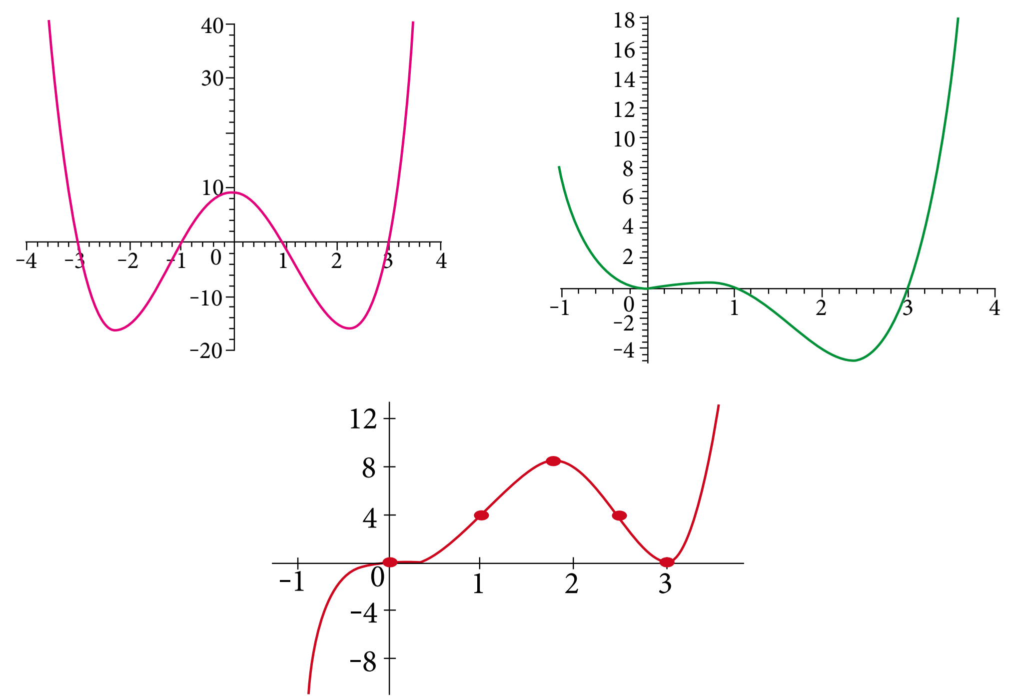
**Act-98)** Encontrar un polinomio :

a) de grado $2$, que tenga los ceros $3$ y $5$.
b) de grado $3$, que tenga los ceros $2$, $0$ y $5$.
c) de grado $4$, que tenga los ceros $-3$, $-1$, $2$ y $4$

**Act-99)** Use la división sintética para demostrar que $a=-2$ es un cero de $f(x)=3x^4+ 8x^3-2x^2-10x+4.$

**Act-100)** Demuestre que $x-c$ no es factor, o divisor, de $p(x)=x^4+5x^2+2$ para algún número real “$c$”.

**Act-101)** A partir de las gráficas de $y = f(x)$ siguientes, determina para cada una de ellas:




a) Los interceptos con los ejes coordenados
b) Los intervalos donde la función es positiva
c) Los intervalos donde la función es negativa
d) Los intervalos donde la función es creciente
e) Los intervalos donde la función es decreciente
f) Los valores máximos y mínimos relativos
g) ¿Cuál es el grado de cada una de estas funciones?

**Act-102)** Para cada una de las siguientes funciones polinomiales:

1. $f(x) = x^2 + x - 12$
2. $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x$
3. $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$
4. $f(x) = -2x^4 - x^3 + 3x^2$
5. $f(x) = 2x^5 - x^3$

Determina:
a) Los interceptos con los ejes coordenados
b) Los intervalos donde $y = f(x) > 0$
c) Los intervalos donde $y = f(x) < 0$
d) Diez de sus puntos en el plano cartesiano y bosqueja su gráfica usando una hoja milimétrica.
e) A partir de la gráfica correspondiente, y de forma aproximada, sus valores máximos y mínimos relativos.

### *Funciones racionales*

De igual forma que ocurre con los polinomios, cada fracción algebraica racional permite definir una función real de variable real, estas funciones definidas por una fracción racional se llaman ***funciones racionales*** y en este caso el dominio no será todo el conjunto de los números reales sino aquel subconjunto del mismo en el que no se anula el denominador. Como un polinomio es una fracción racional de denominador 1, las funciones polinomiales son caso particulares de las funciones racionales.

**Definición:** Una función racional es una función definida por una correspondencia del tipo $x \to \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ en la que $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios en una variable. El dominio de la función es el subconjunto de los números reales en el que $Q(x) \neq 0$.

Si $Q(x) = \mathbf{k}, \mathbf{k} \in \Re$, se tiene el caso particular de una función polinomial.

Ya que una función racional es una función algebraica definida por un cociente entre polinomios, también puede ser representada en general como:

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_mx^m} = \frac{p(x)}{q(x)} \quad ; \quad q(x) \neq 0$$

Donde $q(x)\neq 0$ significa que el dominio de la función $(Dom\, f)$ lo forman todos los números reales excepto los valores del dominio que anulan el denominador.

**Ejemplos de funciones racionales:**

$f(x) = \dfrac{k}{x}$ $\quad h(x) = \dfrac{x-3}{x^2-1}$ $\quad g(x) = \dfrac{x^2+5x+6}{x-\sqrt{2}}$ $\quad w(x) = 2x+1$

**Nota:** observa como las funciones de proporcionalidad inversa y polinomiales son un caso especial de las funciones racionales.

Graficar las funciones racionales suele ser más complicado que la graficación de funciones polinomiales, por lo cual una simple tabulación, aunque es de mucha ayuda, así como la determinación de los ceros o de interceptos resultan insuficientes. De ahí que se requiera del concepto y determinación de ***asíntotas.***

Intuitivamente podemos decir que una asíntota de una función $f(x)$ es una recta ***l*** cuya distancia a la curva tiende a cero, cuando $x$ tiende a infinito positivamente o negativamente $(x \to \pm\infty)$ o bien cuando $x$ tiende a un punto $c$ $(x \to c)$.

Las asíntotas pueden ser verticales, horizontales u oblicuas. Aquí únicamente se determinaran las verticales y horizontales

**Ejemplo 52.** Analizar y graficar la función racional $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$.

**Resolución:** Determinemos primeramente los interceptos de la ***gráfica de f*** con los ejes coordenados, para ello cuando $x$=0 la función tiene el valor $y = f(0) = -2$, por lo que su único intercepto con el ***eje Y*** es el punto $P(0, -2)$.

Mientras que si hacemos que y=0, entonces observemos que no existe ningún valor de $x$ que cumpla con esta condición, de ahí concluimos que la gráfica de $f$ no tiene **interceptos** con el eje X, o $y = f(x)$ **no tiene ceros**, o $f(x) \neq 0$ para toda $x \in \text{Dom} f = \Re - \{1\}$ (¿Por qué?).

Sin embargo, aun cuando el denominador se anula para $x$ =1, lo que implica que $f$ no está definida para $x = 1$ y que $D_f = \Re - \{1\}$, podemos analizar el comportamiento de la función en las cercanías de $x$ =1 apoyándonos de la siguiente tabla (que deberás completar):

| $x$ | $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$ | $x$ | $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$ |
|---|---|---|---|
| 500 | 0.004 | -498 | -0.004 |
| 100 | 0.02 | -98 | -0.02 |
| 2 | 2 | 0 | -2 |
| 1.5 | 4 | 0.5 | -4 |
| 1.2 | | 0.8 | |
| 1.1 | | 0.9 | |
| 1.01 | | 0.99 | |
| 1.001 | | 0.999 | |
| $x \to 1^+$ | $f(x) \to \infty$ | $x \to 1^-$ | $f(x) \to -\infty$ |

De la tabulación anterior (y de la gráfica) se observa que:

Para valores de $x$ próximos a 1 pero mayores que 1, la función toma valores positivos que pueden sobrepasar a cualquier cantidad fijada de antemano tomando una $x$ suficientemente próxima a 1. Esto se simboliza así:

$$f(x) \to -\infty \text{ cuando } x \to 1^+$$

Para valores de $x$ próximos a 1 pero inferiores a él, el denominador de la fracción es negativamente pequeño, así que $f(x)$ toma valores negativos de valor absoluto cada vez mayor a medida que $x$ se aproxima hacia 1 por la izquierda. Esto se simboliza así:

$$f(x) \to -\infty \text{ cuando } x \to 1^-$$

Para valores positivos de $x$ muy grandes o valores negativos muy pequeños la función adquiere valores cada vez más próximos al cero. Esto se simboliza así:

$$f(x) \to 0 \text{ cuando } x \to +\infty \text{ o } x \to -\infty$$

La figura 1.40 muestra una parte de la gráfica de la función racional $f$ en las proximidades de la recta (asíntota) vertical $x = 1$ y la recta (asíntota) horizontal $y = 0$.

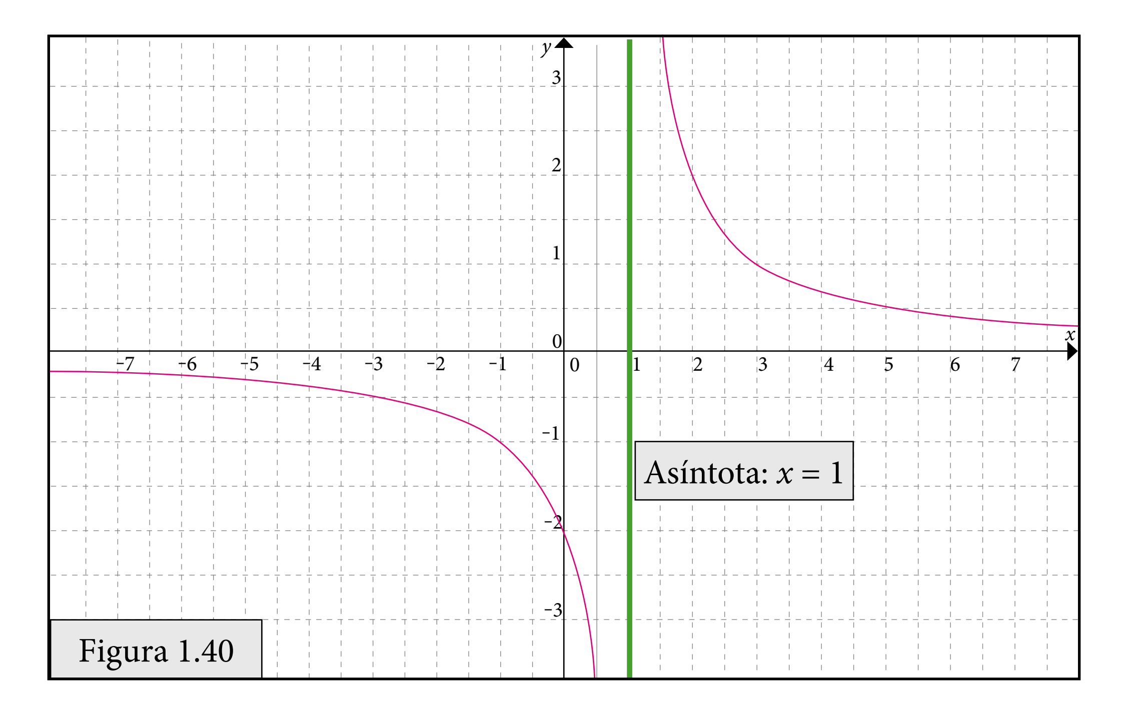
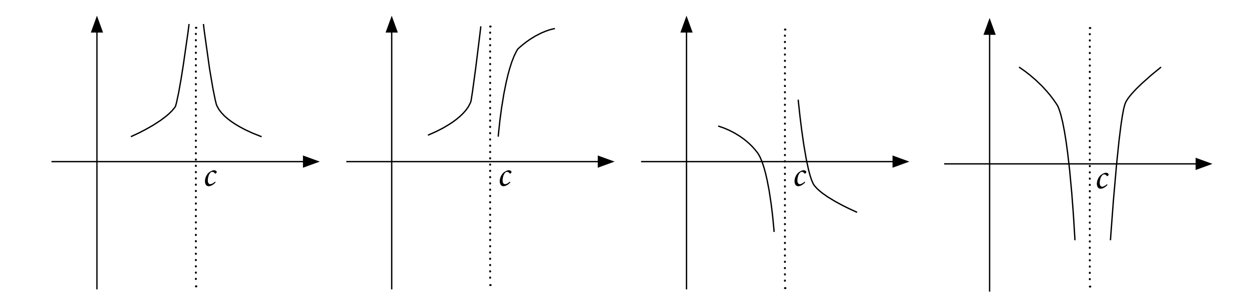


Figura 1.40

Finalmente observemos que la función es decreciente en los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(1, \infty)$. Y no tiene ni máximos ni mínimos relativos.

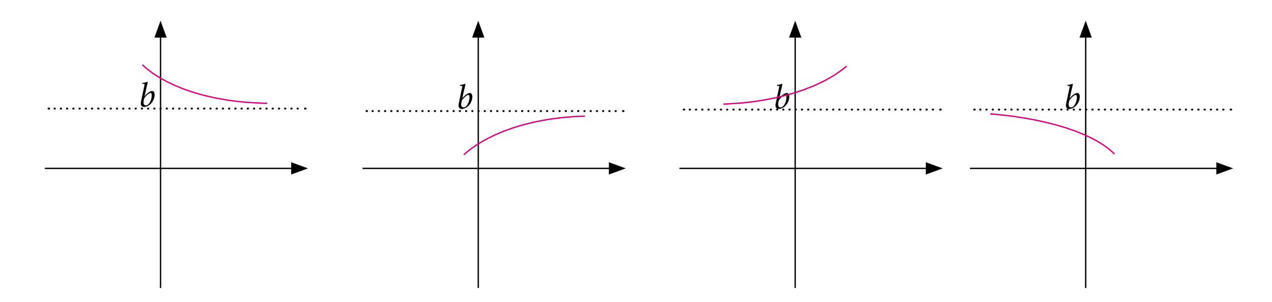
Formalizando: La recta $x$=a es una asíntota vertical para la gráfica de $y = f(x)$ si $f$ aumenta o disminuye sin límite cuando $x$ se aproxima hacia c desde la derecha o desde la izquierda. De manera simbólica:

$$f(x) \to \infty \text{ o } f(x) \to -\infty \ (f(x) \to \pm\infty) \text{ cuando } x \to c^{+} \text{ o } x \to c^{-} \ (x \to c)$$



Estas ideas se pueden expresar también de la siguiente manera: si existe un número "$c \in \text{Dom} f$" tal que, $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$, entonces, la recta "$x = c$" es una asíntota vertical de la gráfica de la función.

En forma análoga, la recta $y = b$ es una ***asíntota horizontal*** para la gráfica de $y = f(x)$, si $f(x)$ se aproxima hacia b a medida que $x$ aumenta sin límite o disminuye sin límite. De manera simbólica: $f(x) \to b$ *cuando* $x \to \infty$ o $x \to -\infty$ .




Las figuras de arriba muestran las posibles posiciones relativas entre la función y la asíntota horizontal. Hay que destacar que una función puede poseer muchas asíntotas verticales pero a lo más dos asíntotas horizontales, ya que una función solo puede tomar un valor para cada $x$.

También estas ideas se formalizan de la siguiente manera: si para "$x \in \text{Dom} f$"existe el límite $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$ , entonces, la recta "$y = \text{b}$" es una asíntota horizontal de $f$.

**Ejemplo 53:** Determinar las asíntotas verticales y horizontales de la función racional .

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}}$$

**Resolución:** la gráfica de esta función (Figura 1.41) nos muestra que

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{(x-2)^2} = 0$$

Por tanto la recta $y = 0$ es la asíntota horizontal.

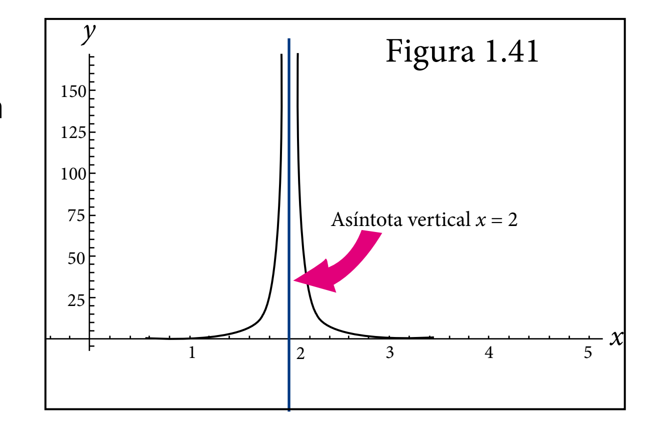


Figura 1.41

Mientras que la recta $x = 2$ es la asíntota vertical.

Analíticamente la asíntota vertical se puede determinar resolviendo la ecuación:

$$q(x) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

**Ejemplo 54.** Determinar las asíntotas de la función racional $f(x)=\dfrac{x+1}{x+3}$.

**Resolución:** En la figura 1.42 se muestra la gráfica de la función. De donde se observa que:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+1}{x+3}=1 \qquad \lim_{x\to-3}\frac{x+1}{x+3}=\pm\infty$$



Por tanto:
la recta $y=1$ es la asíntota horizontal.

Y la recta $x=-3$ es una asíntota vertical.

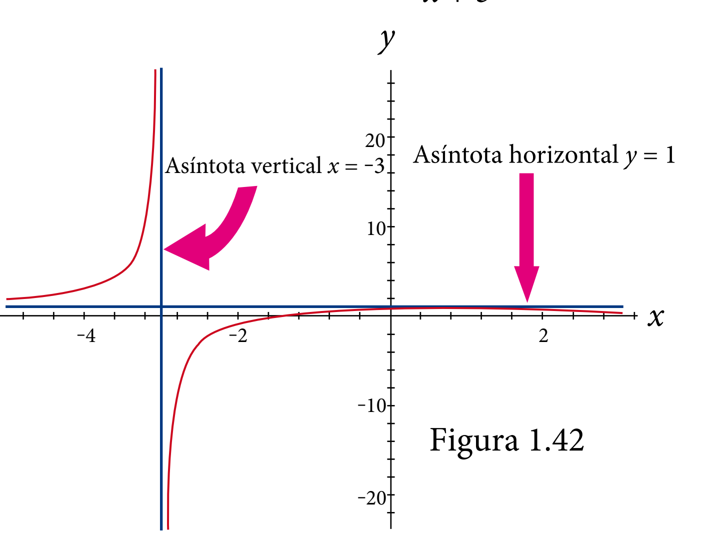


Figura 1.42

Regularmente el comportamiento de las funciones racionales es mucho más variado que el de las polinomiales, pues tanto en el numerador como en el denominador hay polinomios y ambos crecen sin límite cuando $x$ se aleja del origen.

De hecho, en $f(x)=\dfrac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m}$ el término principal (el de mayor grado) es el que predomina para valores de $x$ grandes, de ahí que el comportamiento de $f$ sea muy similar al cociente de los términos principales del numerador y el denominador.

De donde resulta que las funciones $\boldsymbol{f(x)}=\dfrac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m}$ y $\boldsymbol{g(x)}=\dfrac{a_nx^n}{b_mx^m}$ poseen un comportamiento asintótico similar cuando $x\to\infty$ ó $x\to-\infty$.

Como la función g es mucho más fácil de analizar que la función $f$, debido a que las potencias se simplifican, esto permite simplificar el análisis del comportamiento de una función racional para valores grandes de la variable.

Así, pues, con relación a la determinación de las asíntotas horizontales se pueden presentar tres situaciones:

1) Si $n<m$ la función $g$ queda: $g(x)=\dfrac{a_n}{b_mx^{m-n}}$ que tiende hacia cero cuando $x\to\infty$ ó $x\to-\infty$, así que, en este caso, la función $f$ posee la asíntota horizontal $y=0$ para $x\to\infty$ y $x\to-\infty$.

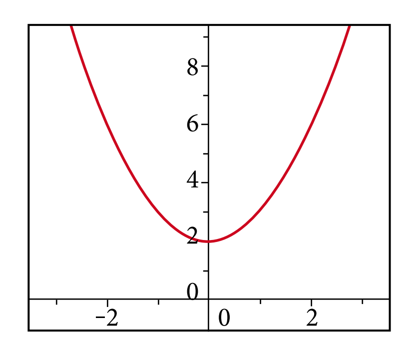
2) Si $n = m$ la función g queda: $g(x) = \frac{a_n}{b_m}$ que es una constante, y en este caso, la función $f$ posee la asíntota horizontal $y = \frac{a_n}{b_m}$ cuando $x \to \infty$ y $x \to -\infty$.

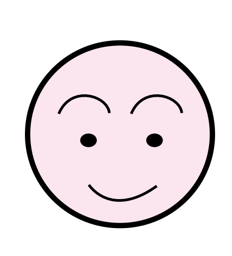
3) Si $n > m$, la función $f$ no tiene asíntotas horizontales.

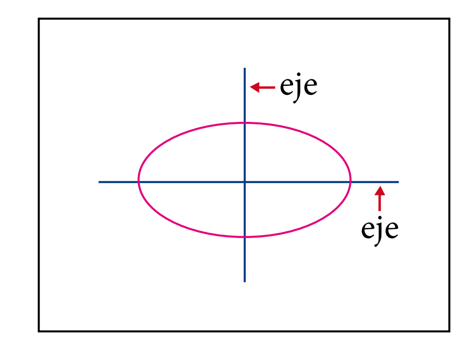
**Nota:** En particular, si $n = m+1$ se puede realizar la división y quedará un polinomio de primer grado (cociente) más una función racional con el grado del numerador (residuo) menor que el del denominador: $f = \frac{P(x)}{Q(x)} = mx + b + \frac{r(x)}{d(x)}$ . Como la parte fraccionaria tiende hacia cero cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$, en este caso la función $f$ se comporta asintóticamente como una recta inclinada, la gráfica posee una a*s*íntota oblicua cuya ecuación es $y = mx + b$.

Al graficar una función además de analizar si tiene asíntotas también resulta conveniente investigar las simetrías de su gráfica respecto a los ejes coordenados o respecto a un punto (como puede ser el origen).

**Simetría respecto a una recta:** En la secundaria ya estudiaste que un eje o recta de simetría es una línea que atraviesa una figura de tal manera que cada lado es la imagen de espejo del otro. Así si dobláramos la figura en la mitad a lo largo del eje o recta de simetría, tendríamos que las dos mitades que resultan son iguales, tal como se muestra en las siguientes figuras:

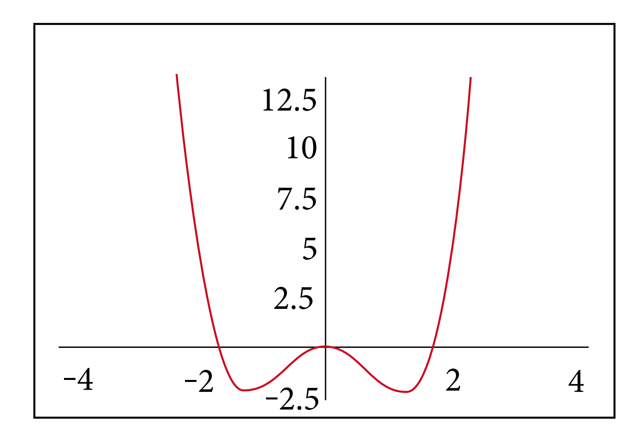


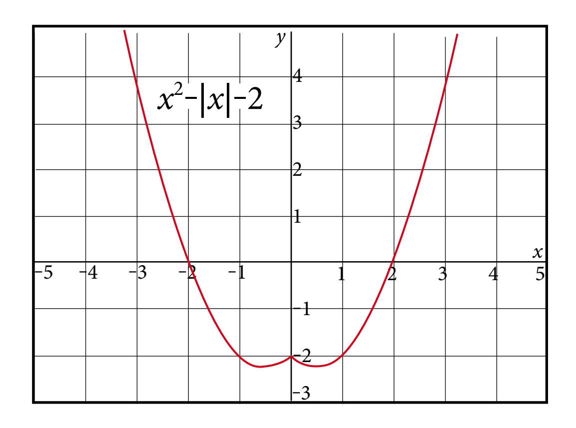






Por ejemplo la gráfica de la parábola de arriba, cuya ecuación es $y = x^2 + 2$, tiene como eje de simetría a la recta $x = 0$. Además, ya que $y = f(x)$, se puede verificar que $f(3) = f(-3) = 11$, $f(1) = f(-1) = 3$, y en general, $f(x) = x^2 = f(-x)$.

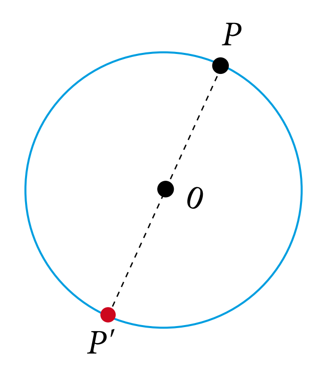
La simetría puede describirse analíticamente. Así, cuando en una función $y = f(x)$ se cumple que: $f(x) = f(-x)$, a $f$ se le llama **función par** y su grafica es simétrica respecto al eje **Y**. Dos ejemplos de una función par son: $p(x) = x^4 - 3x^2$ y $h(x) = x^2 - |x| - 2$ cuyas gráficas respectivas aparecen a continuación.

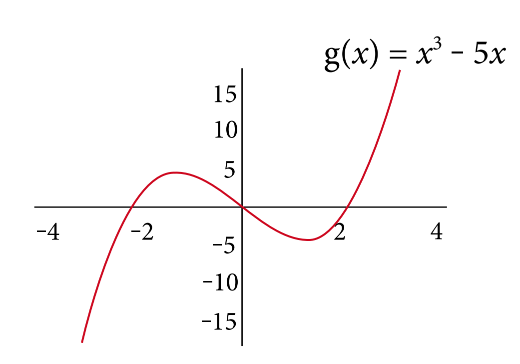



**Simetría respecto a un punto:** Algunas figuras planas tienen un punto de simetría. El caso más conocido y evidente es el de la circunferencia respecto a su centro.

En una circunferencia, si elegimos un punto $P$ cualquiera y trazamos una recta que pase por su centro, $O$, el otro punto de corte entre la recta y la circunferencia es $P'$, que está a la misma distancia de $O$ que P (o sea, $O$ es el punto medio de $PP'$). Es decir, cualquier punto de la circunferencia tiene otro punto simétrico respecto a $O$.




Esta simetría también puede describirse analíticamente. Así, cuando en una función $y = f(x)$ se cumple que: $f(x) = -f(-x)$, a se le llama **función impar** y su gráfica es simétrica respecto al punto $P(0,0)$. Un ejemplo de función impar es: $g(x) = x^3-5x$, cuya gráfica aparece a la derecha de la relación (circunferencia) de arriba.

**Ejemplo 55.** Analizar y graficar la función racional: $p(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$

**Resolución:**

**Dominio e imagen:** $\text{Dom}\, p = \{x \in \Re : x \neq \pm 1\}$ $\quad\quad$ $\text{Im}\, f = \Re$

**Interceptos con los ejes:** (0, 0)

**Simetrías:** ya que $p(-x) = \dfrac{-x}{1-(-x)^2} = -\dfrac{x}{1-x^2} = -p(x) \quad \Rightarrow \quad p(x) = -p(-x).$

Concluimos que la gráfica es simétrica respecto al origen.

**Asíntotas verticales:** $x = -1$ y $x = 1$

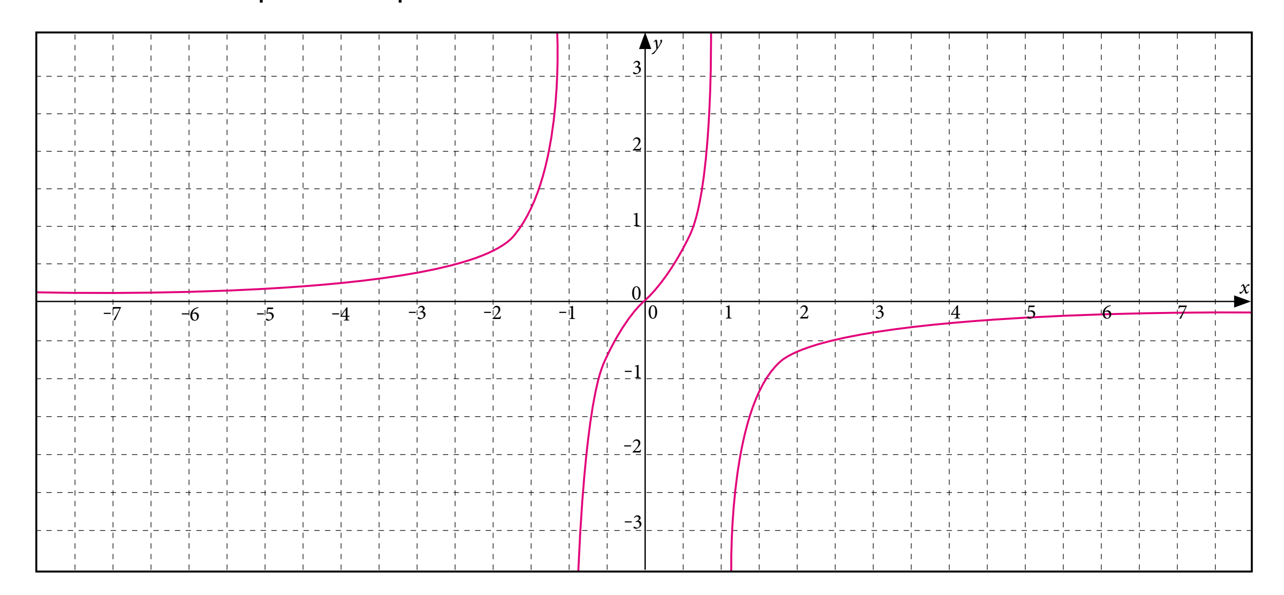
**Asíntotas horizontales** (o comportamiento asintótico): verifica mediante una tabulación que cuando $x \to \infty$, $p(x) \to 0$ y cuando $x \to -\infty$, $p(x) \to 0$. De donde, se concluye que la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

**Signos y ceros de la función:** ya que la gráfica pasa por el origen y el denominador se anula para $x = 1$ y $x = -1$, evaluamos el signo de la función en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ y $(1, +\infty)$.

| $(-\infty,-1)$ | $(-1,0)$ | $(0,1)$ | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|
| (+) | (−) | (+) | (−) |

Puntos en la recta: $-1$, $0$, $1$

Con esta información, y apoyándonos en una tabulación, se puede construir la gráfica de esta función que es la que se muestra a continuación:




**Ejemplo 56**. Analizar y graficar la función racional: $f(x) = \dfrac{x^2 + 6x + 8}{x^2 - x - 2}$

**Resolución:** ya que $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) =\Rightarrow x = 2$ o $x = -1$,
resulta que el $\textbf{\textit{Dom f}} = \{x \in \Re: x \neq -1 \text{ y } x \neq 2\}$

**Interceptos con los ejes:** cuando $x = 0 \Rightarrow f(0) = -4$, por tanto, $(0, -4)$ es el intercepto con el eje Y. cuando

$$y = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 8 = 0 \Rightarrow (x+4)(x+2) = 0 \Rightarrow x = -4 \text{ o } x = -2$$

por tanto,$(-4,0)$ y $(-2,0)$ son los interceptos con el eje X.

**Simetrías:** ya que $f(x) \neq f(-x)$ y $f(x) \neq -f(-x)$, concluimos que no hay simetría con el eje Y, ni tampoco con el origen.

**Asíntotas verticales:** $x = 2$ y $x = -1$

**Asíntotas horizontales:** verifica mediante tabulación que cuando $x \to \infty$, $f(x) \to 1$ y cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to 1$, por lo cual, la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal.

La asíntota horizontal también puede ser determinada transformando la función original de la siguiente manera: $f(x) = \dfrac{x^2+6x+8}{x^2-x-2} = \dfrac{\frac{x^2+6x+8}{x^2}}{\frac{x^2-x-2}{x^2}} = \dfrac{1+\frac{6}{x}-\frac{8}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}$

De la cual se observa fácilmente que si $x \to \infty$, entonces $\frac{6}{x} \to 0$, $\frac{8}{x^2} \to 0$, $\frac{1}{x} \to 0$ y $\frac{2}{x^2} \to 0$.

En consecuencia: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1+\frac{6}{x}-\frac{8}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = \dfrac{1+0+0}{1-0-0} = 1$ .

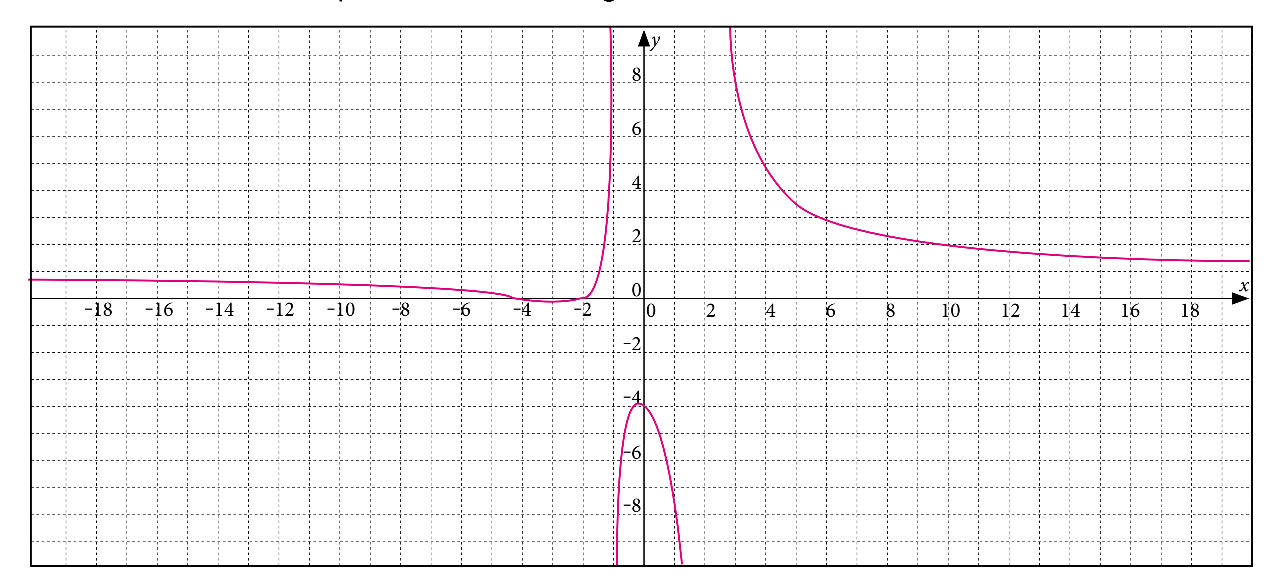
Por tanto, la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal.

**Signos y ceros de la función:** ya que la función tiene por ceros los puntos $(-4,0)$ y $(-2,0)$ y el denominador se anula para $x = 2$ y $x = -1$, resulta conveniente evaluar el signo de la función en los intervalos $(-\infty,-4)$, $(-4,-2)$, $(-2,-1)$, $(-1,2)$ y $(2,+\infty)$. Verifica los resultados de los signos mostrados a continuación.

| $(-\infty,-4)$ | $(-4,-2)$ | $(-2,-1)$ | $(-1,2)$ | $(2,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| (+) | (-) | (+) | (-) | (+) |

Puntos en la recta: $-4$, $-2$, $-1$, $0$, $2$

Con estos datos se puede esbozar su gráfica como se muestra a continuación:



**Ejemplo 57: Analiza la función racional** $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 2}$

**Resolución:** Comenzamos por visualizar la función mediante su gráfico que obtenemos mediante un procesador, el cual se muestra en la figura 1.43.

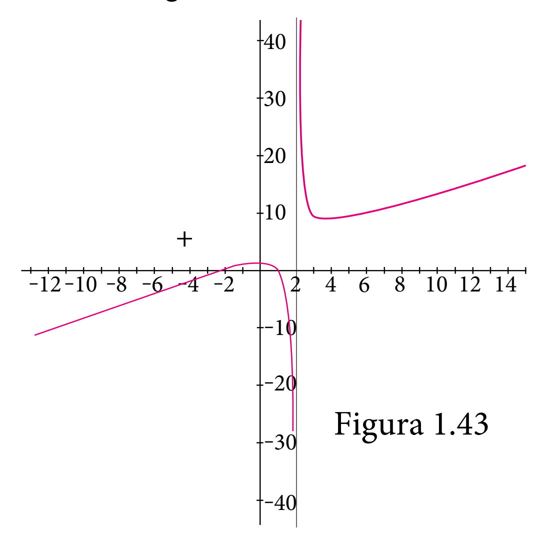


Figura 1.43

De donde inferimos que: $\boldsymbol{Dom\, f} = \Re - \{2\}$ pues la proyección cubre el eje "X" excepto el punto $x = 2$, en la expresión es claro pues el denominador sólo se anula en $x = 2$.

La recta $x = 2$ es una **asíntota vertical** de la función, $f(x) \xrightarrow[x \to 2^-]{} -\infty$ y

$f(x) \xrightarrow[x \to 2^+]{} +\infty$; para comprobar analíticamente la corrección de estas afirmaciones, sabiendo que la recta es una asíntota, analizamos los signos de la función y para ello resolvemos la inecuación $\dfrac{x^2 + x - 2}{x - 2} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+2)(x-1)}{x-2} \geq 0$ que sólo cambia de signo en -2, 1, 2 y para valores menores que -2 es negativa. Obtenemos entonces la siguiente tabla.

| Intervalo | (-∞,-2) | (-2,1) | (1,2) | (2,∞) |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | Negativa | Positiva | Negativa | Positiva |

Esta tabla verifica que, cuando $x \to 2$, por la izquierda la gráfica se acerca a $-\infty$ y por la derecha a $+\infty$.

Si $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, su dominio es $\Re$ - **{ceros de Q(x)}**. Si $x_0$ es un cero de $Q(x)$ y no es cero de $P(x)$ $x_0$ es un *polo* de $f(x)$ y la recta $x = x_0$ es una asíntota de la gráfica de $f(x)$. Al acercarse la variable a $x_0$ $f$ tiende a $-\infty$ o a $+\infty$ según $f(x)$ sea negativa o positiva en ese lado de la asíntota.

Para determinar $\mathbf{Im}\, f$ comenzamos por visualizar proyectando la gráfica sobre el eje "Y, observamos que esta proyección cubre todo el eje excepto un intervalo que la función traza sugiere va desde 1 hasta 9. Para verificarlo expresamos "$x$" en términos de "$y$" y obtenemos: $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 2}$, de donde resulta $x^2 + x - 2 = y(x - 2) = xy - 2y$, o sea,

$$x^2 + (1-y)\, x - 2\,(1-y) = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{y - 1 \pm \sqrt{(y-1)(y-9)}}{2}$$

que sólo se indefine en el intervalo (1,9) en el que es negativo el radicando.

También podemos observar que el valor 1 lo alcanza para $x$=0 y es, aparentemente el máximo de la función para $x$<2; igualmente el valor 9 lo alcanza para $x$=4 (basta resolver la ecuación $f(x)=9$) y es, aparentemente el mínimo de la función si $x$>2. Para comprobar estas afirmaciones resolvemos las inecuaciones:

$$\frac{x^2+x-9}{x-2} \geq 1 \text{ con } x<2 \text{ y } \frac{x^2+x-9}{x-2} \geq 9 \text{ con } x>2 \ .$$

Para la primera resulta (en este intervalo $x$-2<0):
$x^2 + x - 2 \geq x - 2$ que equivale a $x^2 \geq 0$ que es verdadera, luego efectivamente $f(x) \leq 1$ si $x \leq 2$.

Para la segunda resulta (en este intervalo $x$-2 > 0): $x^2 + x - 2 \geq 9x - 18$ que equivale a $x^2 - 8 + 16 \geq (x-4)^2 \geq 0$ que también es verdadera y esto comprueba que $f(x) \geq 9$ si $x \geq 2$. Entonces, en efecto $\mathbf{Im} f = \Re - (1,9)$.

En este proceso hemos comprobado además que la función tiene un punto de **máximo en $x$=0 y que el valor máximo relativo es 1**, además tiene un punto de **mínimo relativo en $x$=4 y el valor mínimo es 9.** Sin embargo, la función no tiene máximo ni mínimo absolutos. Más adelante en el curso desarrollaremos procedimientos más simples para estos análisis.

Para buscar los ceros resolvemos la ecuación $\frac{x^2+x-2}{x-2} = 0$ que tiene dos soluciones $\boldsymbol{x_1}$**=-2** y $\boldsymbol{x_2}$**=1**.

Para analizar el comportamiento el infinito observamos que la gráfica parece crecer ilimitadamente cuando la variable crece y decrecer ilimitadamente cuando la variable decrece, es decir, aparentemente: $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$ y $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ . Para verificar estas inferencias efectuamos la división y obtenemos: $x + 3 + \frac{4}{x-2}$ dado que la fracción propia se comporta como una función potencial de exponente negativo y tiende a cero en el infinito, la función se comporta en el infinito como una función polinomial de grado 1 lo que confirma nuestras inferencias.

**Las funciones racionales se comportan en el infinito como la función polinomial que representa la parte entera después de efectuada la división.**

**Ejemplo 58: Analiza la función** $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3-x^2-2x}$

**Resolución:** Comenzamos por la visualización mediante la representación gráfica de la función como muestra la figura 1.44.

Para analizar el dominio, proyectamos sobre el eje "X", aparentemente la proyección cubre todo el eje excepto los puntos $x$=2 y $x$=0; sin embargo al igualar el denominador a cero obtenemos: $x^3+x^2-2x=x(x^2-x+2)=x(x-2)(x+1)=0$, de lo que resulta, $x$=0, $x$=2, $x$=-1, es decir del dominio hay que excluir también=-1.

Para comprender a que se debe la discrepancia, simplificamos la fracción que define la función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3-x^2-2x}=\dfrac{x-1}{x(x-2)}$, en esta expresión simplificada el factor $x+1$ no aparece en el denominador, esto ilustra que los procesadores pueden graficar la fracción simplificada y, por tanto, hay que prestar atención al dominio de la función racional cuando se parte de su representación en un procesador. Entonces concluimos $\mathbf{Dom}\,f=\Re-\{0,2\}$.

Para la imagen, expresamos "$x$" en términos de "$y$": $x=\dfrac{(2y+1)\pm\sqrt{4y^2+1}}{2y}$ en esta expresión aparentemente el único valor inadmisible es $y$=0 pero se han hecho transformaciones no equivalentes y se pueden haber perdido raíces, el gráfico sugiere que es así y comprobamos que para $x$=1 $y$=0 luego $\mathbf{Im}\,f=\Re$.

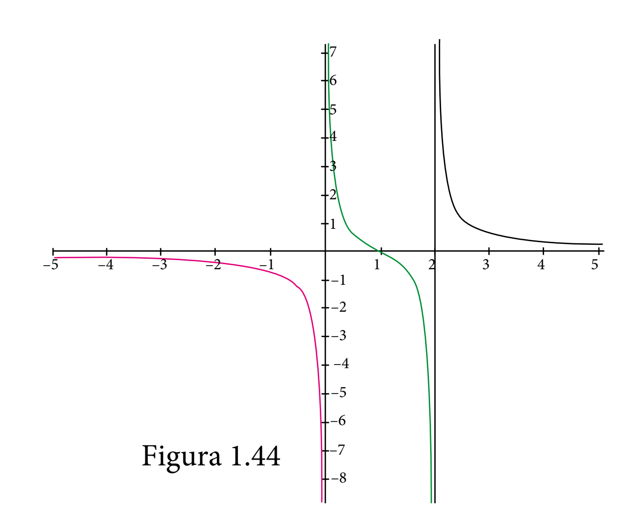


Figura 1.44

Tenemos además que: $x$=2 y $x$=0 son polos y las rectas correspondientes son asíntotas de la gráfica.

La gráfica sugiere que:

$$f(x)\xrightarrow[x\to 0^-]{}-\infty,\quad f(x)\xrightarrow[x\to 0^+]{}+\infty,\quad f(x)\xrightarrow[x\to 2^-]{}-\infty,\quad f(x)\xrightarrow[x\to 2^+]{}+\infty.$$

Para verificarlo analizamos los signos de la función, como sólo cambia de signo en 0, 1 y 2 tenemos la siguiente tabla:

| **Intervalo** | $(-\infty,0)$ | $(0,1)$ | $(1,2)$ | $(2,\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | Negativa | Positiva | Negativa | Positiva |

Lo que ratifica nuestras inferencias.

La función tiene un único cero en $x$=1. No es par ni impar, por tanto no tiene simetrías con el eje Y ó algún punto.

Para analizar el comportamiento en el infinito, observamos que la gráfica sugiere que: $f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}0$ y $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ , esta inferencia la ratificamos si notamos que el grado del numerador es menor que el denominador, es decir, se equipara a una función potencial de exponente negativo.

**Ejemplo 59: Analiza la función racional** $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+3x+2}$

**Resolución:** Comenzamos por visualizar trazando la gráfica de la función con un procesador como aparece en la figura 1.45, además, descomponemos en factores numerador y denominador $\dfrac{x^2}{x^2+3x+2}=\dfrac{x^2}{(x+2)(x+1)}$ y resulta $\textbf{Dom}\,f=\Re-\{-1,-2\}$ pues estos valores anulan el denominador, como no anulan al numerador concluimos que son polos de la función y para analizar el comportamiento en los polos analizamos el signo, sólo cambia de signo en -2, y -1 pues 0 es un cero doble y ahí no cambia de signo. Las rectas $x$=-2 y $x$=-1 son asíotas bilaterales de la gráfica.

| **Intervalo** | $(-\infty,-2)$ | $(-2,-1)$ | $(-1,\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | Positiva | Negativa | Positiva |

Por tanto:

$$f(x)\xrightarrow[x\to(-2)^-]{}+\infty\ ,\ f(x)\xrightarrow[x\to(-2)^+]{}-\infty,\ f(x)\xrightarrow[x\to(-1)^-]{}-\infty\ \text{ y }\ f(x)\xrightarrow[x\to(-1)^+]{}+\infty.$$

Como en el intervalo (-2,-1) la función tiene dos ramas infinitas negativas en ambos extremos y su trazo en el intervalo no tiene saltos, conjeturamos que debe tener un máximo en el interior del intervalo. La gráfica refuerza esta conjetura y encontramos que el punto de máximo es aproximadamente (-1.3 , -8). Para comprobarlo resolvemos la ecuación $\dfrac{x^2}{x^2+3x+2}=-8$ , de donde se obtiene que $x_{1,2}=-\dfrac{4}{3}$, es decir, para este valor de $x$ la función alcanza el valor máximo $y=-8$.

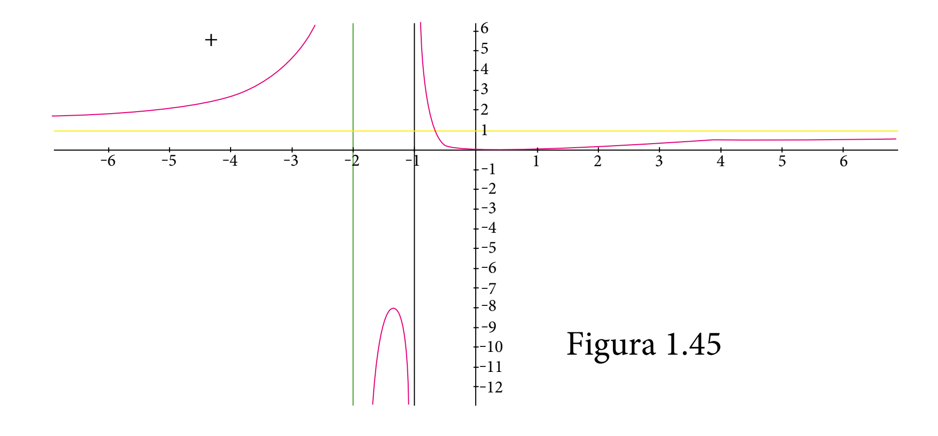


Figura 1.45

La función no es ni par ni impar, por tanto no tiene simetría respecto al eje Y ó algún punto.

Análogamente la función alcanza un **mínimo en $x$=0 y el valor mínimo es 0.** Este mínimo es al mismo tiempo el **único cero de la función que es doble.**

Una vez que hemos ratificado las conjeturas hechas a partir del gráfico, podemos concluir sobre los intervalos de monotonía:

**Creciente en los intervalos:** $(-\infty, -2)$, $\left(-2,-\frac{4}{3}\right]$ y $[0, +\infty)$

**Decreciente en los intervalos:** $\left[-\frac{4}{3},-1\right)$ y $(-1,0]$

Del análisis que hemos hecho se infiere que la imagen es $\Re-(-8,0)$, para confirmarlo expresamos "$x$" en términos de "$y$":

$$\frac{x^2}{x^2+3x+2} = y \quad \Rightarrow \quad (x^2 + 3x + 2)y = x^2 \quad \Rightarrow \quad (y - 1)x^2 + 3yx + 2y = 0$$

De adonde resulta $x_{1,2} = \dfrac{-3\pm\sqrt{y(y+8)}}{2(y-1)}$ expresión que deja de estar definida en el intervalo $(-8,0)$ y en $-1$. Una verificación permite ver que $-1$ es una raíz extraña y entonces $\mathbf{Im}\, f = \Re - (-8,0)$.

Para analizar el comportamiento en el infinito, observamos que el numerador y el denominador son del mismo grado, es decir, la función se comporta en el infinito como una constante, para precisar efectuamos la división y obtenemos:

$$\frac{x^2}{x^2+3x+2} = 1 - \frac{3x+2}{x^2+3x+2}$$

el término sustractivo se hace muy pequeño cuando $x$ crece, luego la función se aproxima a 1 tanto en $+\infty$, como en $-\infty$; como para valores muy grandes de la variable, tanto positivos como negativos, el denominador es positivo resulta que en $-\infty$ la función se aproxima a 1 por valores mayores y en $+\infty$ por valores menores, esto lo expresamos simbólicamente en la forma: $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 1$ y $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$

Por tanto, la recta $y$=1 es una asíntota bilateral de la función.

**Ejemplo 60:** Analiza el comportamiento de la función $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{x^3-3x+1}{x^2+1}}$

**Resolución:** Representamos la función en un procesador como ilustra la figura 1.46.

El numerador es una función de tercer grado, sabemos que tiene al menos un cero, la gráfica sugiere que existen tres puntos de intersección con el eje X, o sea, tres ceros pero no tenemos una fórmula para obtenerlos, por eso para buscar los ceros recurrimos a un procesador y obtenemos: $x_1 \approx -1.9$, $x_2 \approx 0.3$ y $x_3 \approx 1.5$. Como el denominador no tiene

ceros reales, los ceros del numerador son los ceros de la función. No tienen polos y, por tanto, **Dom** $f = \Re$.

Como la función sólo cambia de signo en los ceros tenemos los siguientes resultados para los intervalos de prueba:

| **Intervalo** | $(-\infty,-1.88)$ | $(-1.88, 0.347)$ | $(0.347, 1.53)$ | $(1.53, \infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | Negativa | Positiva | Negativa | Positiva |

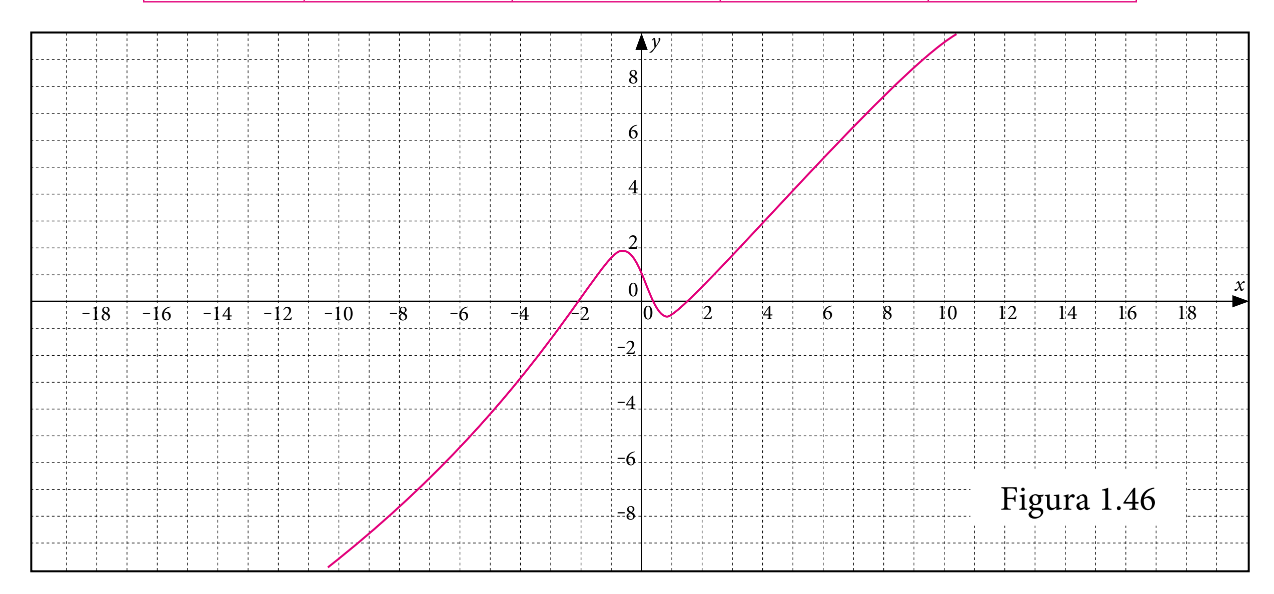


Figura 1.46

La gráfica sugiere que entre los dos primeros ceros hay un máximo y entre los dos últimos un mínimo, en este caso de manera aproximada se determina que el punto de mínimo es **($x$=0.8 , y= -0.5) y el punto de máximo es ($x$=-0.5 , y= 1.9).**

Para analizar el comportamiento en el infinito efectuamos la división y obtenemos:

$\frac{x^3-3x+1}{x^3+1} = x + \frac{1-4x}{x^2+1}$, aquí podemos ver que se comporta como una función potencial de exponente 1, entonces: $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$ y $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Para la monotonía obtenemos entonces:
**Creciente:** $(-\infty, -0.5]$ y $[0.8, +\infty)$ **Decreciente:** $(-0.5 , 0.8]$

Del gráfico inferimos que la imagen es el conjunto de los reales, para verificarlo basta observar el resultado de efectuar la división, luego **Im** $f = \Re$.

Hasta ahora hemos visto la importancia de los procesadores matemáticos para la visualización de las funciones y el consiguiente análisis de sus propiedades, en los capítulos que siguen continuaremos aprendiendo sobre la utilidad de dichos procesadores y la forma en que pueden aplicarse en el trabajo matemático y, en particular, en el presente curso.

Sin embargo, la visualización puede ser engañosa y hay que estar alertas sobre la falsa idea de que basta usar el procesador y no se necesitan conocimientos matemáticos.

En las unidades de aprendizaje 2 y 3 estudiarás conceptos y procedimientos que te permitirán el estudio analítico de las funciones y, al mismo tiempo, te facilitarán una representación mental rápida de las propiedades y el comportamiento de las funciones.

**Resumiendo:** Como vemos el análisis de las funciones racionales puede ser más complejo que el del resto de las funciones estudiadas hasta ahora. Los ejemplos sugieren un procedimiento sistemático recomendable para el análisis de funciones:

1. Representar la función con un procesador matemático, aunque la visualización geométrica es de gran ayuda no siempre es suficiente.
2. Determinar los ceros del numerador y el denominador. Precisar el dominio, los ceros y los polos.
3. Elaborar una tabla de valores de las variables.
4. Analizar el signo de la función y el comportamiento en los polos.
5. Analizar posibles máximos y mínimos y los intervalos de monotonía.
6. Analizar el comportamiento en el infinito.
7. Determinar asíntotas.
8. Determinar el rango o conjunto imagen de la función.
9. Analizar la paridad y determinar simetrías.
10. Mediante el análisis analítico precisar la imagen de la función.

***ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE:***



**Act-103)** De las siguientes afirmaciones, ¿cuáles son verdaderas y cuáles falsas?

a) La función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+3}$ es racional.

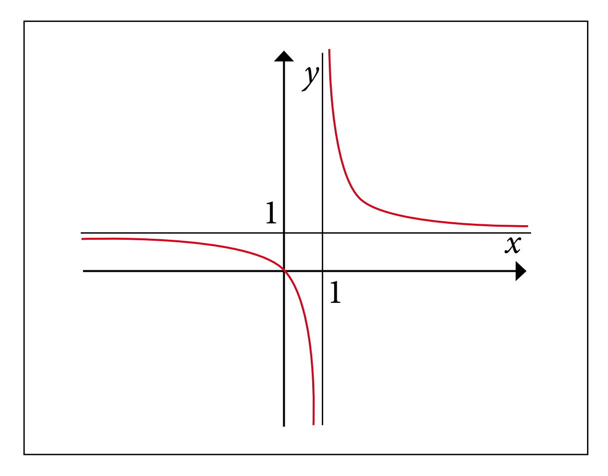
b) El número de asíntotas verticales de una función racional es igual al grado del denominador.

c) El gráfico de una función racional no puede intersecar sus asíntotas.

**Act-104)** ¿Cuál es el dominio de cada una de las siguientes funciones racionales?

$$f(x) = \frac{4}{x-5} \qquad g(x) = \frac{x}{3x^2+6} \qquad h(x) = \frac{2x^2-3x-2}{x^2-3x-14} \qquad w(x) = \frac{4x^2+2}{9x^5}$$

**Act-105)** La siguiente figura muestra la gráfica de la función $h(x) = \dfrac{x}{x-1}$




En base a este gráfico determina lo siguiente:

a) Las asíntotas verticales y horizontales
b) El dominio de la función
c) Los interceptos
d) Las simetrías

**Act-106)** Si a la función inversa $f(x) = \dfrac{k}{x}$ se le adiciona el parámetro **b** y a la variable independiente $x$ se le adiciona el parámetro **c**, resulta la nueva función $g(x) = \dfrac{k}{(x+c)} + b$. Prueba que esta nueva función sigue siendo una hipérbola que tiene por centro el punto (-c, b) y sus asíntotas son paralelas a los ejes coordenados. Además, verifícalo graficando la función $g(x) = \dfrac{3x+5}{x+1} = \dfrac{2}{x+1} + 3$ .

**Act-107)** Determina las asíntotas verticales y horizontales para cada una de las siguientes funciones y esboza las gráficas correspondientes a ellas:

$g(x) = \dfrac{x}{3x^2+6}$ $h(x) = \dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-5x-14}$ $w(x) = \dfrac{x+1}{x-5}$ $f(x) = \dfrac{2x+6}{x^2-9}$

**Act-108)** Grafica (auxiliándote de un procesador, por ejemplo Graphmatica o Máxima) y analiza las siguientes funciones racionales:

a) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-3x-4}$ b) $g(x) = \dfrac{x^2-3x-4}{x-2}$ c) $f(x) = \dfrac{4}{x-5}$

d) $f(x) = \dfrac{4}{x-5} + 3$ e) $f(x) = \dfrac{x^3-7}{x^2-3x+2}$ f) $h(x) = \dfrac{6x+2}{x-7}$

g) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$ h) $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$ i) $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$

j) $f(x) = \dfrac{x-2}{2x+1}$ k) $f(x) = \dfrac{\dfrac{x+1}{3-x}}{2+\dfrac{1}{x}}$ l) $f(x) = \dfrac{x^3-7x^2+12x}{x-2}$

**Act-109)** Construye una función racional que satisfaga las siguientes condiciones:

a) Tiene una asíntota vertical en $x = 1$, una asíntota horizontal en $x = 0$, intersecta al eje "Y" en (0 , 2) y nunca cruza al eje "X".

b) Tiene asíntotas verticales en $x = 2$ y $x = 3$, una asíntota horizontal en $y=1$ y corta al eje X en 3 y -4.

c) $f(2) = 0, f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 3, f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 3, f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty, f(x) \xrightarrow[x \to 0-]{} +\infty.$

**Act-110)** Un medicamento inyectado en la sangre tiene una concentración de $c(t)=\frac{at}{t^2 + b}$ cuando $t \geq 0$ medido en horas. Las constantes a y b dependen del medicamento de que se trate.

a) Traza la gráfica de c(t) para varios valores de a y b. ¿Cómo influyen los valores de a y b en la gráfica?

b) Cuando $a = 3$ y $b = 4$ determina aproximadamente la máxima concentración del medicamento en la sangre.

c) ¿Qué pasa con la concentración cuando t se hace muy grande?

d) Para $a = 2$ y $b = 1$ determina cuanto demora la concentración en disminuir por debajo de 0.1.

**Act-111)** Se necesita fabricar una lata de aluminio para guardar $2000 \text{ cm}^3$ de líquido. Calcula las dimensiones aproximadas de la lata con las que reduce al mínimo la cantidad de aluminio necesario.

***Funciones irracionales***

Las funciones irracionales son funciones algebraicas que vienen expresadas a través de al menos un radical que lleve en su radicando la variable independiente. Ejemplos:

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ $g(x) = \sqrt{x+1}$ $h(x) = \sqrt{x-4} + 2$ $w(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 8}}$

Algunas funciones irracionales pueden representarse mediante la siguiente expresión matemática: $f(x) = \sqrt[n]{h(x)}$, donde, $h(x)$ es una función polinomial o una función racional.

Si el radical tiene índice impar, entonces el dominio de $f(x) = \sqrt[n]{h(x)}$ será todo el conjunto $\Re$ de los números reales porque al elegir cualquier valor de $x$ siempre vamos a poder calcular la raíz de índice impar de la expresión que haya en el radicando. Pero si el radical tiene índice par, para los valores de $x$ que hagan el radicando negativo no existirá la raíz y por tanto la función irracional mencionada no tendrá imagen $y$.

En síntesis, si n es impar el dominio de $f(x) = \sqrt[n]{h(x)}$ es $\Re$ y si n es par, el radical está definido solamente para $h(x) \geq 0$ ; así que para calcular el dominio de $f(x)$ que contenga un radical, habrá que imponer la condición anterior al conjunto de la expresión $f(x)$.

A continuación veremos algunos ejemplos ilustrativos del método para determinar el dominio de una función irracional:

**Ejemplo 61.** Sea $f(x) = \sqrt{x+1}$. Para determinar su dominio resolvemos primero la inecuación lineal $x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$ . Por lo tanto, el dominio de la función es $\text{Dom} f = [-1, \infty)$.

**Ejemplo 62**. Sea $g(x) = \sqrt[4]{x^2 - 25}$. Para determinar su dominio resolvemos primero la inecuación cuadrática $x^2 - 25 \geq 0$. Aplicando el procedimiento ya estudiado en la unidad IV del curso de Matemáticas II determinamos que $\text{Dom}\, g = [-\infty, -5) \cup [5, \infty)$.

**Ejemplo 63.** Sea $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 8}}$ . Al igual que en la anterior resolvemos la inecuación cuadrática $x^2 - 2x - 8 > 0$ cuya solución es precisamente el dominio de la función: $\text{Dom}\, h = [-\infty, -2) \cup [4, +\infty)$; observa que ahora la inecuación se planteó como desigualdad estricta, esto es porque el radicando está en un denominador y por lo tanto no puede valer cero.

**Ejemplo 64**. Analizar la función racional $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 6}$.

**Resolución:** la grafica de esta función obtenida con el procesador Graphmatica es la mostrada en la figura 1.47.

En este caso, como el índice del radical es impar resulta que la función está definida para cualquier valor del radicando y en consecuencia la variable independiente puede ser cualquier $x \in \Re$. O sea, el dominio de la función es el conjunto de los números reales: $\mathbf{Dom}\, \boldsymbol{f} = \Re$

**Interceptos con los ejes:** Resolviendo $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 2$

Por tanto los interceptos con el eje X son los puntos (2,0) y (3,0) Además, para $x = 0$ se tiene que $f(0) = \sqrt[3]{0^2 - 5(0) + 6} = \sqrt[3]{6} \approx 1.8$, de donde el intercepto con el eje Y es en el punto $(0, 1.8)$ . Y sus ceros son $x = 2$ y $x = 3$.

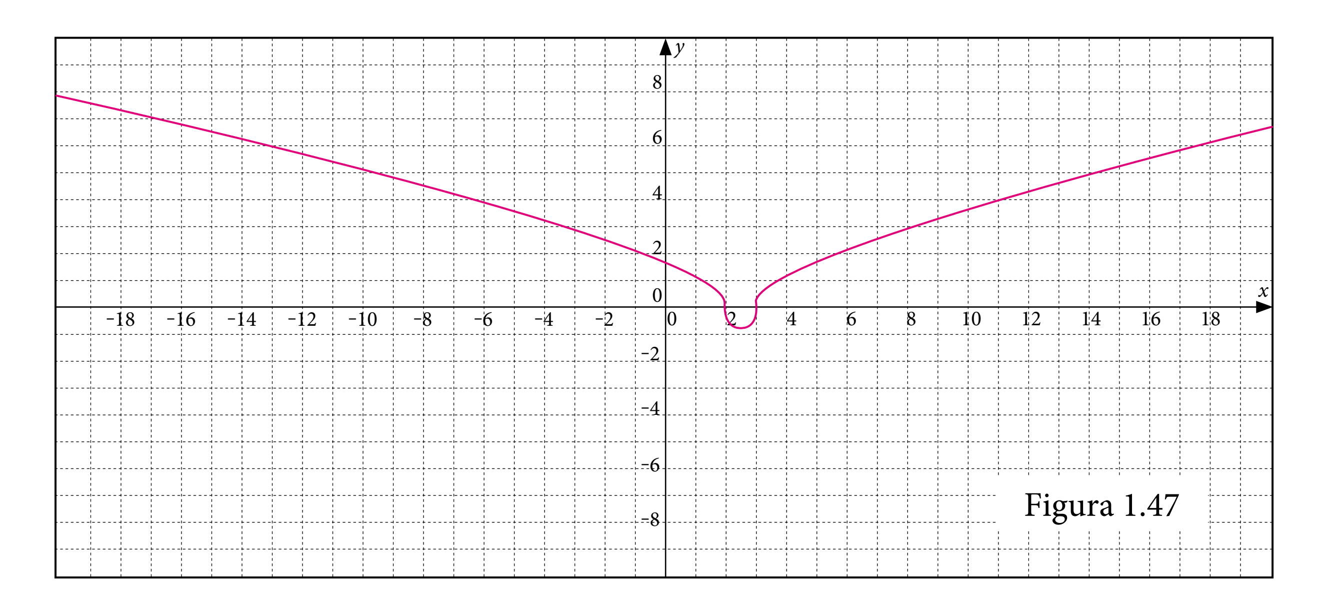


Figura 1.47

De la gráfica se observa que no hay asíntotas ni simetrías. Y que es decreciente en el intervalo $(-\infty, 2.5]$ y creciente en el intervalo $[2.5, \infty)$. Además, no presenta máximos y aproximadamente en $x \approx 2.5$ se encuentra un valor mínimo relativo que es aproximadamente igual a $y \approx 1.8$.



***ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE:***

**Act-112)** Determina el dominio de las siguientes funciones irracionales y esboza la gráfica correspondiente de todas y cada una de ellas en una misma hoja milimétrica:

1) $f(x) = \sqrt{x}$ 2) $g(x) = \sqrt{x} + 2$ 3) $h(x) = \sqrt{x - 3}$ 4) $u(x) = \sqrt{x + 3}$

**Act-113)** Determina el dominio de las siguientes funciones irracionales y esboza la gráfica correspondiente de todas y cada una de ellas en una misma hoja milimétrica:

1) $y = \sqrt{4 - x^2}$ 2) $q(x) = -\sqrt{4 - x^2}$ 3) $g(x) = \sqrt{4 - x^2} + 3$ 4) $h(x) = \sqrt{4 - x^2} - 3$

**Act-114)** Grafica y analiza las siguientes funciones racionales:

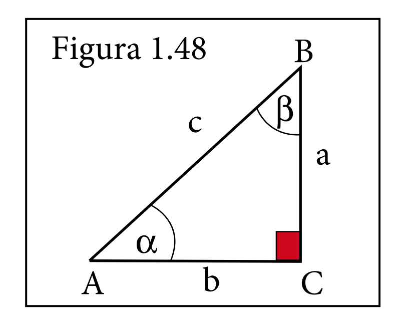
a) $w(x) = \sqrt[3]{x}$ b) $p(x) = \sqrt[3]{x} - 2$ c) $v(x) = \sqrt[3]{x - 3}$ d) $q(x) = \sqrt[3]{x + 3} + 5$

e) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ f) $f(x) = \dfrac{x + 4}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$ g) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{x^2 - 5x + 6}}$

***Funciones trigonométricas directas e inversas***

Antes de definir y analizar las funciones trigonométricas recordemos la definición de las razones trigonométricas para el triangulo rectángulo.

En el curso de Matemáticas III has estudiado relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo (como el **Teorema de Pitágoras**) y también entre sus ángulos.




Teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$

La suma de los ángulos interiores del triangulo rectángulo es igual a 180 grados: $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$
y en particular,

$$\measuredangle C = 90° \quad \Rightarrow \quad \measuredangle A + \measuredangle B = 180°$$

Además de estas relaciones, existen otras entre lados y ángulos, que se expresan mediante las razones trigonométricas: **seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante**. Por ejemplo si $\alpha$ es un ángulo agudo de vértice A y $\beta$ el ángulo agudo de vértice B en un triángulo rectángulo ABC (figura 1.48), y sean a y b (las longitudes o medidas de) los catetos y c (la longitud de) la hipotenusa,se llama:

| Razón | seno | coseno | tangente | cotangente | secante | cosecante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Angulo $\alpha$ | $\text{sen}\ \alpha = \frac{a}{c}$ | $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ | $\tan \alpha = \frac{a}{b}$ | $\cot \alpha = \frac{b}{a}$ | $\sec \alpha = \frac{c}{b}$ | $\csc \alpha = \frac{c}{a}$ |
| Angulo $\beta$ | $\text{sen}\ \beta = \frac{b}{c}$ | $\cos \beta = \frac{a}{c}$ | $\tan \beta = \frac{b}{a}$ | $\cot \beta = \frac{a}{b}$ | $\sec \beta = \frac{c}{a}$ | $\csc \beta = \frac{c}{b}$ |

Como en cualquier triángulo rectángulo la hipotenusa siempre es mayor que cualquiera de los catetos, de las definiciones anteriores resulta que las razones seno y coseno siempre son menores o igual que uno:

$$\text{sen}\ \alpha \leq 1 \ \text{ y } \ \cos \alpha \leq 1$$

Además, se puede probar mediante la semejanza de triángulos que las razones trigonométricas así definidas no dependen del tamaño de los lados del triángulo rectángulo elegido, y son las mismas para todos los ángulos que tienen la misma amplitud. O sea, sus valores dependen del ángulo agudo seleccionado.

También observemos que como las longitudes de los lados del triangulo rectángulo son siempre positivas, entonces los valores de las razones trigonométricas están limitadas a los números reales positivos. Y para extender el concepto de razón trigonométrica al de función trigonométrica (o de función real de variable real), se hace necesario redefinirlas.

Para llevar a la práctica esta idea, en primer término recodemos que los ángulos pueden ser medidos, dentro del **sistema sexagesimal,** principalmente en grados. Sin embargo, en Cálculo Diferencial e Integral cuyo objeto matemático central de estudio son las funciones, se usa con mayor frecuencia el **sistema circular** cuya unidad de medida es el radian. En este sistema se utiliza, para medir el ángulo, la razón entre la longitud del arco de una circunferencia, interceptada por el ángulo y el radio de dicha circunferencia. Esta razón puede utilizarse para medir el ángulo porque es constante para un mismo ángulo, cualquiera sea el radio de la circunferencia empleada.

En efecto, ya que la longitud de un arco de una circunferencia de radio r que tiene 1° de amplitud es $\frac{L}{360}$, donde L es la longitud de la circunferencia, entonces la longitud *l* de un arco de $\alpha°$ de la misma circunferencia es $\alpha$ veces $\frac{L}{360}$, o sea, $l = \frac{L}{360} \cdot \alpha°$. Si sustituimos $L = 2\pi r$, simplificamos y despejamos convenientemente, entonces podemos escribir la siguiente proporción: $\frac{l}{r} = \frac{\pi\, \alpha°}{180°}$.

Esto significa que dicha razón depende solamente de la amplitud del ángulo (Ver figura 1.49). En particular cuando se tiene que $l=r$, entonces la medida del ángulo en el sistema circular es de un radian.

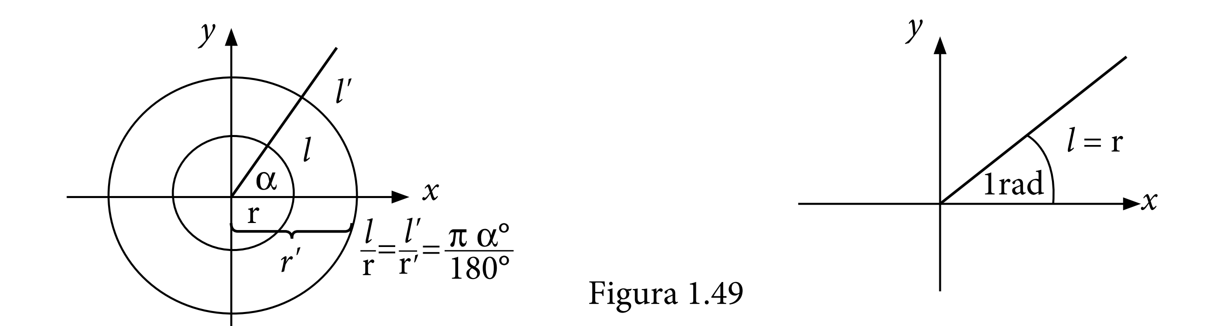



Figura 1.49

**Definición:** Un radián (en símbolos 1 rad) es la amplitud de un ángulo central de un circulo en el que la longitud del arco es igual al radio (fig. 1.49).

La definición anterior establece la unidad del sistema circular de medida de ángulos y significa que para calcular la medida de un ángulo en este sistema se calcula la razón entre la longitud del arco y el radio: $\frac{l}{r}$ *radianes*.

**Ejemplo 65:** Calcula la medida en el sistema circular de los siguientes ángulos dados en grados a) $\alpha° = 180°$ , b) $\alpha° = 20°$ , c) $\alpha° = 360°$ , d) $\alpha° = 270°$

**Resolución:**

a) La amplitud de un ángulo llano es 180°, luego: $\frac{l}{r} = \frac{\pi 180°}{180°} = \pi$. Por tanto, la medida de un ángulo llano en el sistema circular es $\pi$ rad, o sea: $180° = \pi\, rad$.

b) En este caso $\alpha° = 20°$ y la razón será: $\frac{l}{r} = \frac{\pi \cdot 20°}{180°} = \frac{\pi}{9}$ . Luego, si denotamos por $\alpha_{rad}$ la amplitud del ángulo en el sistema circular tendremos:

$$\alpha° = 20° = \alpha_{rad} = \frac{\pi}{9}\text{rad}$$

c) $\alpha° = 360°$ y la razón será: $\frac{l}{r} = \frac{\pi \cdot 360°}{180°} = 2\pi \quad \Rightarrow \alpha_{rad} = 2\pi$

d) $\alpha° = 270°$ y la razón será: $\frac{l}{r} = \frac{\pi \cdot 270°}{180°} = \frac{3\pi}{2} \quad \Rightarrow \alpha_{rad} = \frac{3\pi}{2}$

Los razonamientos y ejemplos anteriores pueden ser utilizados para convertir la medida de los ángulos de un sistema a otro; si denotamos por $\alpha_{rad}$ la medida en el sistema circular del ángulo $\alpha$ y por $\alpha°$ a su medida sexagesimal, tendremos que:

$$\alpha_{rad} = \frac{\pi}{180°} \times \alpha° \qquad \alpha° = \frac{180°}{\pi} \times \alpha_{rad}$$

**Ejemplo 66:** Expresa en el sistema sexagesimal las siguientes medidas de ángulos dados en radianes: **a)** $\frac{\pi}{6}$ **b)** $4.57$

**Resolución:** **a)** $\frac{180°}{\pi} \cdot \frac{\pi}{6} = 30°$ **b)** $\frac{180°}{\pi} \times 4.57 = 262°$ (se redondeo $\pi = 3.14$)

En los ejemplos anteriores debes haber notado que la medida de un ángulo en el sistema circular no tiene dimensiones pues es el cociente de dos longitudes. Esta observación nos permite calcular las razones trigonométricas de un número real si consideramos que es la medida de un ángulo en el sistema circular.

**Ejemplo 67:** Calcula el valor de las siguientes funciones

a) $\text{sen}\ \frac{\pi}{4}$ b) $\cos \frac{2\pi}{3}$ c) $\tan 5.25$

**Resolución:** Aunque se pueden calcular directamente en una calculadora (poniéndola en modo de radianes) primero se convertirán los ángulos al sistema sexagesimal.

a) $\text{sen}\ \frac{\pi}{4} = \text{sen}\left(\frac{180°}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \text{sen}\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos \frac{2\pi}{3} = \cos\left(\frac{180°}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{3}\right) = \cos 120° = -\frac{1}{2}$

c) $\tan 5.25 = \tan\left(\frac{180°}{\pi} \cdot 5.25\right) = \tan 301° = -1.66$

En la práctica es conveniente que recuerdes de memoria la tabla de conversión para las medidas de los ángulos notables del primero y segundo cuadrantes que se representa a continuación:

| grados | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| radianes | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |

**Nota sobre el uso de la calculadora:** Si se trabaja las medidas de las amplitudes de ángulos en radianes debe ponerse la calculadora en el modo (Rad). En muchas calculadoras científicas no existe una orden que convierta grados a radianes o viceversa, salvo en calculadoras potentes que tienen conversiones de unidades. Sin embargo, siempre es posible en una calculadora científica introducir las constantes que aparecen en las fórmulas de conversión de grados a radianes (o viceversa) y operar con ellas.

Ahora consideremos un sistema de coordenadas y una circunferencia con centro en el origen; todo ángulo puede ser colocado (y de una sola manera) de forma tal que su vértice coincida con el origen de coordenadas, uno de sus lados (llamado lado inicial) coincida con la semirrecta positiva OX y que el otro lado (llamado lado terminal) quede ubicado (a partir del inicial) en la zona barrida en sentido contrario al de las manecillas de reloj (Ver figura 1.50).

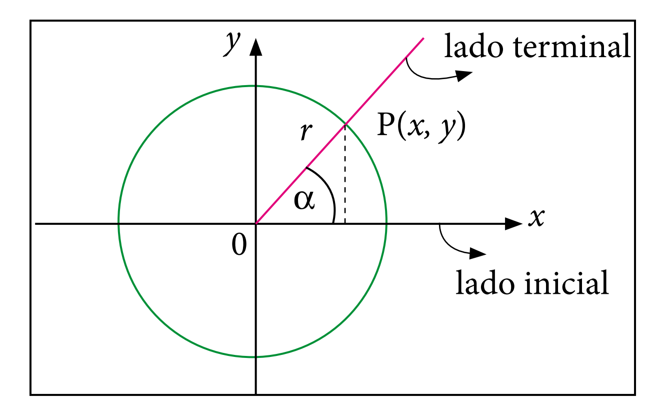



Figura 1.50

De esta forma, el lado terminal de cada ángulo $\alpha$ interseca en un único punto $\mathbf{P(x, y)}$ a la circunferencia (**circunferencia trigonométrica de radio $r$**) y podemos asociar al ángulo ese punto de una manera unívoca. Esto nos permite redefinir las razones trigonométricas de ángulos agudos como funciones trigonométricas para cualquier ángulo utilizando las coordenadas de esos puntos tal como se ilustra a continuación.

Sea $\alpha$ un ángulo y $\mathbf{P}(x, y)$ el punto que le corresponde en la circunferencia trigonométrica de radio $r$, y considerando que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, entonces definimos a las **funciones trigonométricas directas como:**

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \csc\alpha = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} \quad (\alpha \neq 0^\circ\,;\, \alpha \neq 180^\circ)$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \csc\alpha = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} \quad (\alpha \neq 90^\circ\,;\, \alpha \neq 270^\circ)$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} \quad (\alpha \neq 90^\circ\,;\, \alpha \neq 270^\circ) \qquad \cot\alpha = \frac{x}{y} \quad (\alpha \neq 0^\circ\,;\, \alpha \neq 180^\circ)$$

En la siguiente figura 1.51 se ilustran estas definiciones para ángulos de los cuatro cuadrantes, observa que para ángulos $\alpha : 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$, la nueva definición coincide con la conocida, es decir, aquella es un caso particular de esta.

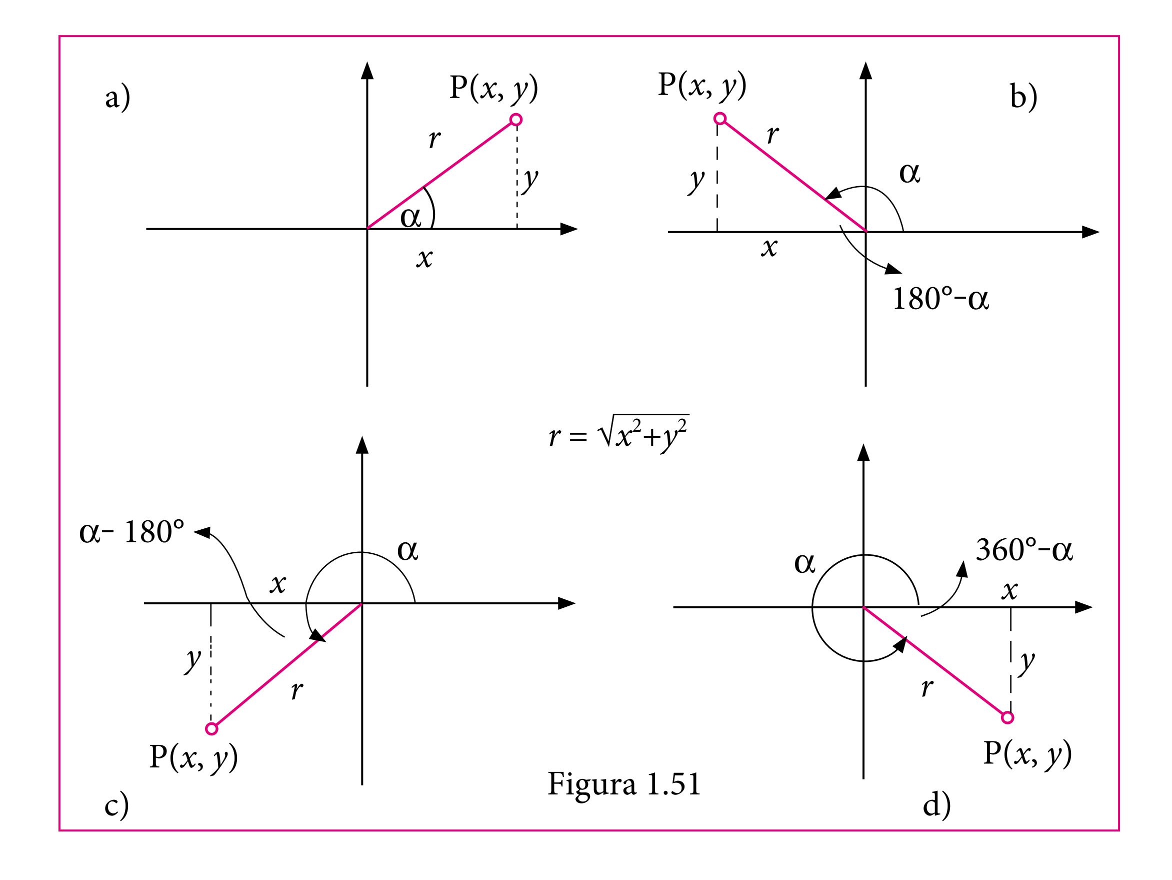


Figura 1.51

Observa que con esta definición los ángulos pueden ser también obtusos o mayores de noventa grados (incluso hasta de cualquier magnitud positiva o negativa), y las razones trigonométricas pueden ser también negativas, pero el seno y el coseno en módulo no pueden ser mayores que 1.

$$-1 \leq sen\ \alpha \leq 1 \qquad \text{y} \qquad -1 \leq cos\ \alpha \leq 1$$

En resumen, hemos visto que cualquier número $\boldsymbol{x}$ real puede considerarse que representa la medida en radianes de un ángulo, esto significa que al número real se pueden hacer corresponder las razones trigonométricas de ese ángulo.

***Función seno: definición, representación gráfica y propiedades***

Se llama función **seno** a la función que a cada número real $\boldsymbol{x}$ le asocia $y = sen\ x$.

En otras palabras la función seno está formada por los pares ordenados $(x\ ,\ \text{sen}\ x)$ con $x \in \Re$. Esta función tiene como dominio al conjunto de los números reales, en símbolos: $\boldsymbol{Dom}\ (\text{sen}\ x) = \Re$.

Como la función seno satisface $\text{sen}\ (x + 2k\pi) = \text{sen}\ x\ ,\ k \in \text{Z}$ , basta representarla en un intervalo de longitud 2π. Para hacerlo en el intervalo $[0\ ,\ 2\pi)$ calculamos algunos valores (utiliza la calculadora) y los representamos en una tabla como la siguiente:

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{7\pi}{12}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{11\pi}{12}$ |
| sen $x$ | 0 | 0.26 | 0.5 | 0.71 | 0.87 | 0.97 | 1 | 0.97 | 0.87 | 0.71 | 0.5 | 0.26 |
| $x$ | π | $\frac{13\pi}{12}$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{17\pi}{12}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{19\pi}{12}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $\frac{23\pi}{12}$ |
| sen $x$ | 0 | -0.26 | -0.5 | -0.71 | -0.87 | -0.97 | -1 | -0.97 | -0.87 | -0.71 | -0.5 | -0.26 |

Al representar estos pares ordenados en un sistema de coordenadas se obtiene una gráfica como la que se muestra en la figura 1.52.

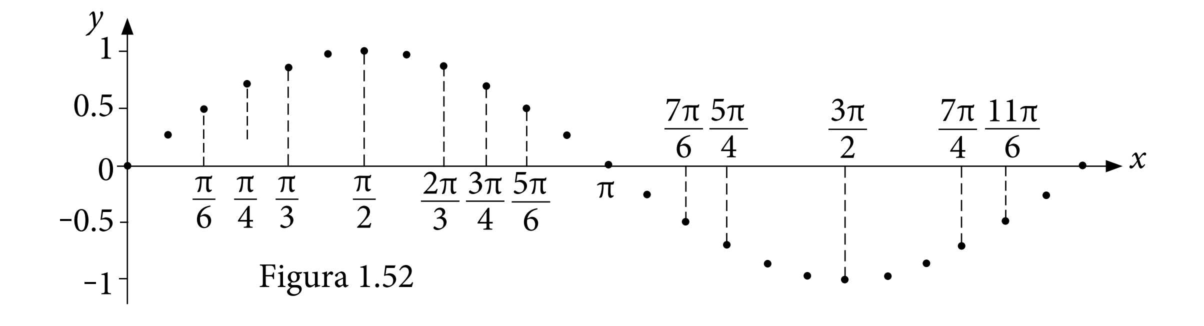


Figura 1.52

Si aumentamos el número de puntos se obtiene una idea cada vez más aproximada de la gráfica de la función seno tal como lo muestra la figura 1.53.

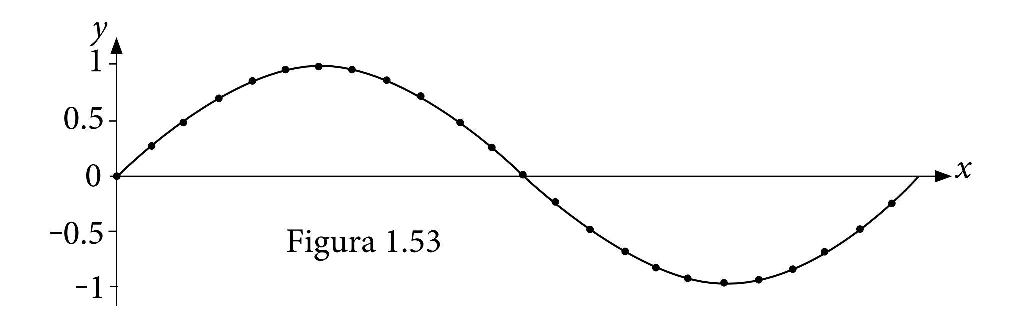


Figura 1.53

Como los valores del seno se repiten en cada intervalo de longitud $2\pi$, la gráfica de la función seno en todo intervalo de la forma $[-A, A]$ se obtiene trasladando la porción de gráfico que corresponde al intervalo $[0, 2\pi]$ en ambos sentidos tantas veces como sea necesario. En otras palabras “se repite” a derecha e izquierda el gráfico de la figura 1.53 (Ver figs. 1.54). Además, téngase en cuenta que $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha$.

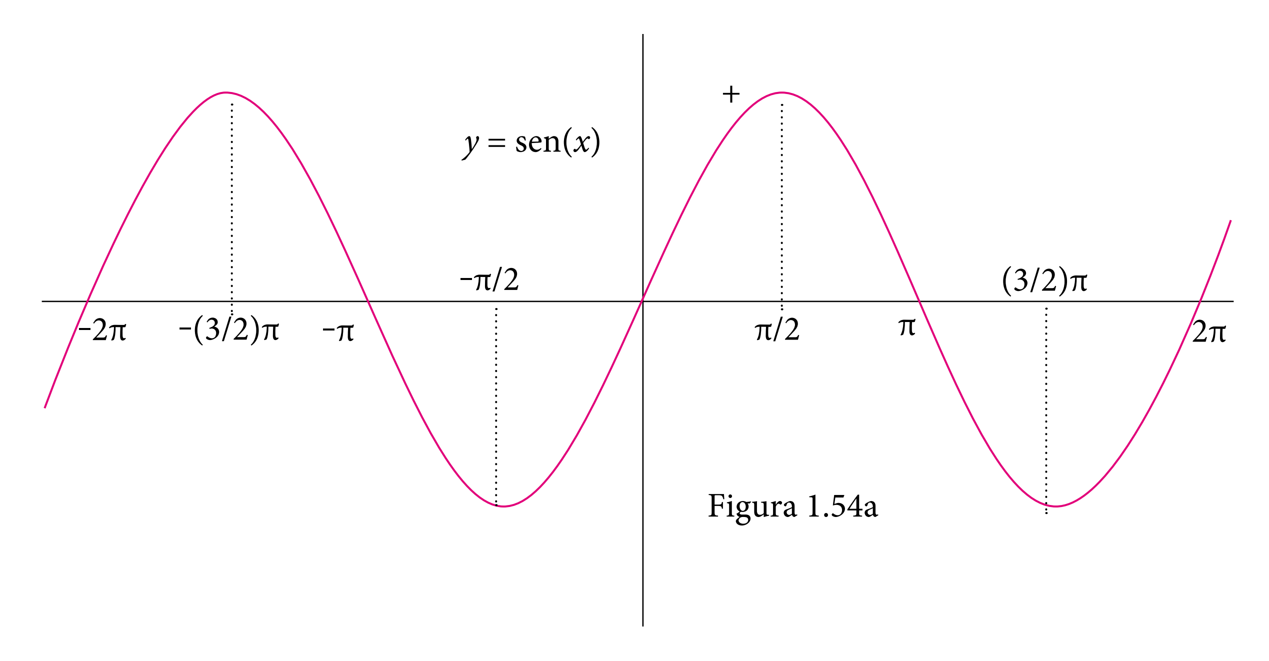


Figura 1.54a

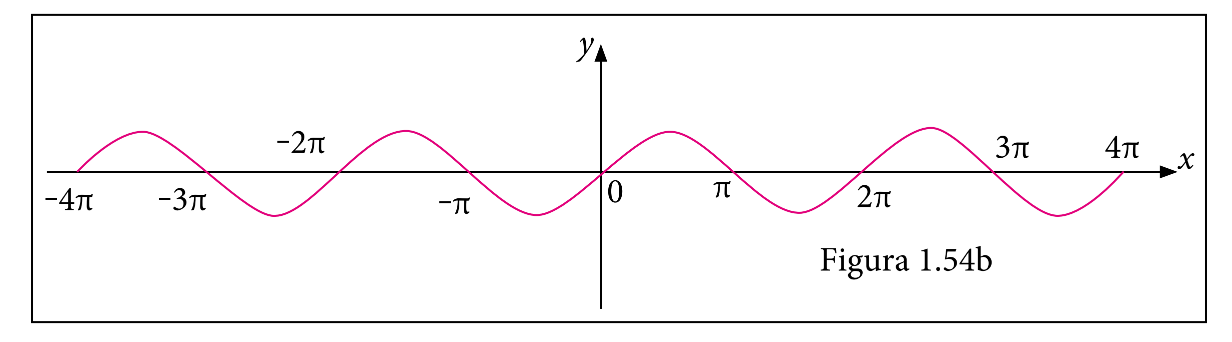


Figura 1.54b

En los gráficos anteriores pueden apreciarse las siguientes propiedades de la función seno.

| | |
|---|---|
| Dominio: $\Re$ | La proyección de la gráfica cubre todo el eje "X". |
| Imagen: $[-1\ ,\ 1]$ | La proyección sobre el eje "Y" cubre este intervalo pues $\lvert \text{sen } x\rvert \leq 1$. |
| Ceros: $x = k\pi\ ,\ k \in Z$ | En estos puntos sen $x=0$ y la gráfica corta el eje "X" |
| Paridad: impar | La gráfica es simétrica respecto al origen pues $\text{sen}(-x) = -\text{sen } x$. |
| Monotonía: no es monótona | Se alternan intervalos de crecimiento y decrecimiento. |

Aunque la función seno no es monótona, en cada cuadrante sí lo es, por lo que es muy fácil recordar cómo varía la función seno en el intervalo fundamental $[0, 2\pi]$:

| subintervalo | $[0\ ,\ \pi/2]$ I cuad. | $[\pi/2, \pi]$ II cuad. | $[\pi\ ,\ 3\pi/2]$ III cuad. | $[3\pi/2, 2\pi]$ IV cuad. |
|---|---|---|---|---|
| Variación | Creciente 0 a 1 | Decreciente 1 a 0 | Decreciente 0 a –1 | Creciente –1 a 0 |
| Signo | + | + | – | – |

Es pues creciente en los intervalos $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$, y es decreciente en los intervalos $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ,\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$. Y cuando $x$ se hace muy grande positiva o negativa, la función no se acerca a ningún valor, oscila de $+1$ a $-1$. De donde, son puntos de máximo los $\left\{x=2k\pi+\frac{\pi}{2} / k \in Z\right\}$ con valor máximo $y=1$ y son puntos de mínimo los $\left\{x=2k\pi-\frac{\pi}{2} / k \in Z\right\}$ con valor mínimo $y=-1$.

Además, la gráfica es la repetición de un patrón, el del intervalo $[0, 2\pi]$, lo expresamos diciendo que ***la función es periódica*** de periodo $2\pi$. Como sabemos, todos los ángulos coterminales con uno dado tienen el mismo seno: $\text{sen } (\alpha + 2k\pi) = \text{sen } \alpha,\ \ k \in Z$. Esta igualdad representa una propiedad de la función seno que es un caso particular de una propiedad general.

Una función real $f$, es periódica si existe un número real $T$, tal que para todo elemento $x$ del dominio de la función se cumple $f(x) = f(x + T)$. El número $T$ recibe el nombre de período de la función.

Ahora puede afirmarse: ***La función seno es periódica, cualquier múltiplo entero de $2\pi$ es un período de la función seno.***

En la gráfica la periodicidad de la función puede apreciarse porque puede obtenerse "repitiendo" indefinidamente la gráfica de cualquier intervalo de longitud $2\pi$. Estos hechos permiten comprender mejor por qué las ecuaciones trigonométricas si tienen solución entonces tienen infinitas soluciones.

***Función arcoseno: $y = arcsen(x)$***

Si restringimos el dominio de la función seno al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ resulta inyectiva pues la ecuación $\operatorname{sen}(x) = a,\ a \in [-1,1]$ tiene una única solución en ese intervalo. También, cuando $\operatorname{sen}(x_1) = \operatorname{sen}(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ cuando $x_1, x_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Esto permite definir la función inversa del seno que se llama arcoseno y se denota por $y = \operatorname{arcsen}(x)$, a cada valor $x$ del intervalo $[-1,1]$ esta función le asigna un único valor $y$ en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ la solución de la ecuación $\operatorname{sen}(y) = x$, es decir, $y = \operatorname{arcsen}(x)$. También se denota $\operatorname{arcsen}(x)$ como $\operatorname{sen}^{-1}(x)$, y por propiedades de la función inversa resulta que: $\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1}(x)\right) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}(x)\right) = x$.

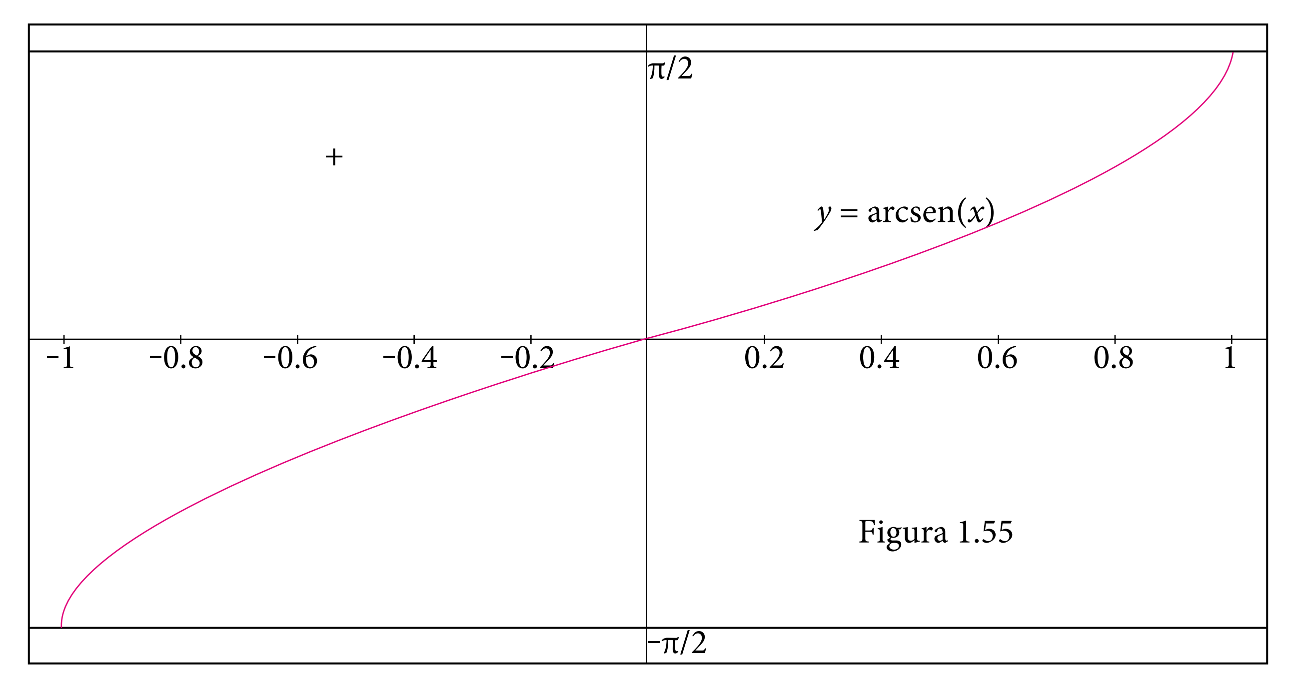


Figura 1.55

Del gráfico (Figura 1.55) inferimos **sus propiedades:** Su dominio es el intervalo $[-1,1]$ y su imagen es el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Es monótona ya que esta función es creciente en todo su dominio. Tiene un punto de mínimo absoluto en $x = -1$, el valor mínimo es $-\frac{\pi}{2}$, tiene un punto de máximo absoluto en $x = 1$ y su valor máxim es $\frac{\pi}{2}$. Tiene un único cero en $x = 0$. Es impar ya que $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$, y por tanto $y = \operatorname{arcsen}(-x) = -\operatorname{arcsen}(x)$, de donde es simétrica respecto al origen de coordenadas.

***Función coseno: definición, representación gráfica y propiedades***

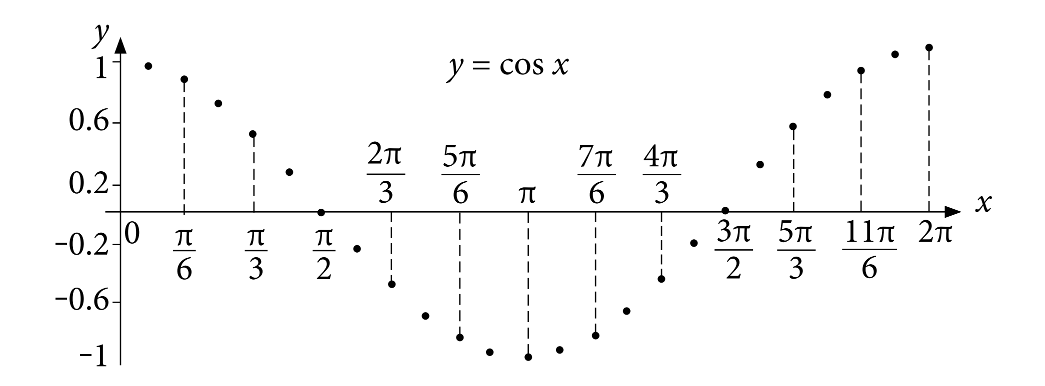
Se llama función **coseno** a la función que a cada número real $x$ le hace corresponder $y = \cos x$.

Por definición, esta función está formada por los pares ordenados ( $x$ , $\cos x$). La función coseno tiene como dominio al conjunto de los números reales, en símbolos: **Dom** $(\cos x) = \Re$. Y al igual que para la función seno, es suficiente representar gráficamente la función coseno en el intervalo $[0, 2\pi]$ y también es una función periódica de periodo $2\pi$.

Para graficarla calculemos algunos valores (con ayuda de la calculadora) y construyamos la tabla siguiente.

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{7\pi}{12}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{11\pi}{12}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos x$ | 1 | 0.97 | 0.87 | 0.71 | 0.5 | 0.26 | 0 | -0.26 | -0.5 | -0.71 | -0.87 | -0.97 |
| $x$ | $\pi$ | $\frac{13\pi}{12}$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{17\pi}{12}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{19\pi}{12}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $\frac{23\pi}{12}$ |
| $\cos x$ | -1 | -0.97 | -0.87 | -0.71 | -0.5 | -0.26 | 0 | 0.26 | 0.5 | 0.71 | 0.87 | 0.97 |

Al representar estos pares ordenados en un sistema de coordenadas se obtiene una gráfica como la que se muestra a continuación.



Si aumentamos el número de puntos se obtiene una idea cada vez más aproximada de la gráfica de la función coseno (fig. 1.56).

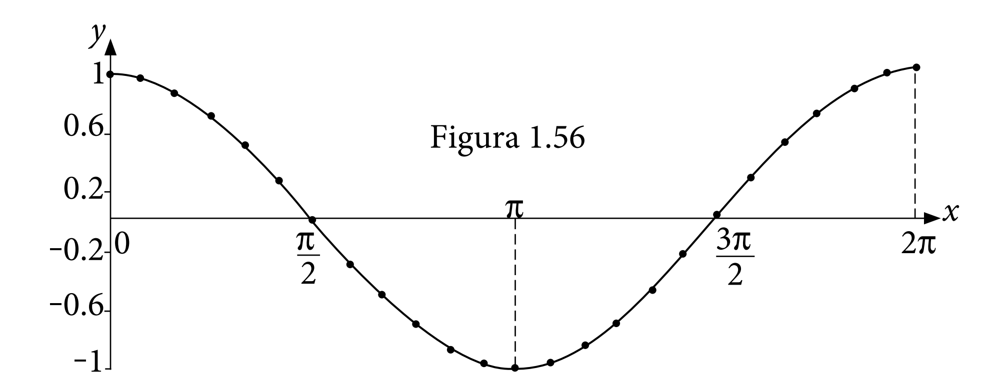


Figura 1.56

Al igual que en el caso de la función seno, la gráfica de la función coseno en todo $\Re$ se obtiene trasladando el gráfico correspondiente al intervalo $[0, 2\pi]$ en ambos sentidos tantas veces como sea necesario. En otras palabras "se repite" a derecha e izquierda el gráfico de la figura 1.56. Además, téngase en cuenta que $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ (Ver figs.1.57 y 1.58).

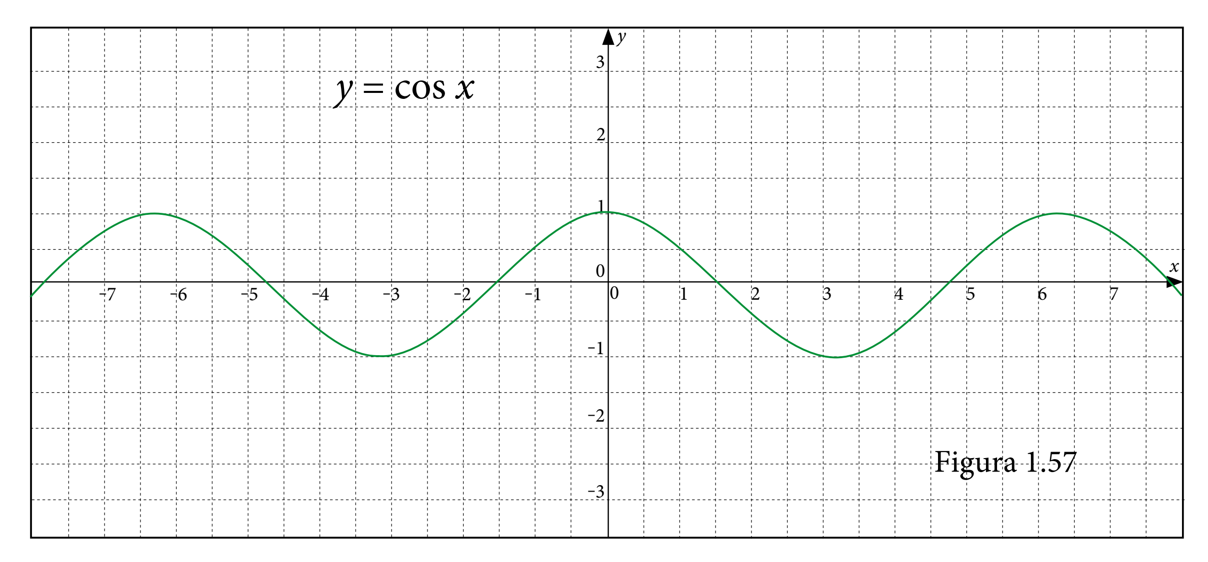


Figura 1.57

Nota: El gráfico de la función $\cos x$ puede también construirse o interpretarse a partir de la siguiente identidad: $\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, lo que significa que la forma de la curva coseno es idéntica a la curva del seno con el origen trasladado al punto $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Es decir, cuando $\cos x = \operatorname{sen} 0 = 0$ ; cuando $x = 0$, $\cos x = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$ ; cuando $x = \frac{\pi}{2}$ , $\cos x = \operatorname{sen}\pi = 0$ y así sucesivamente.

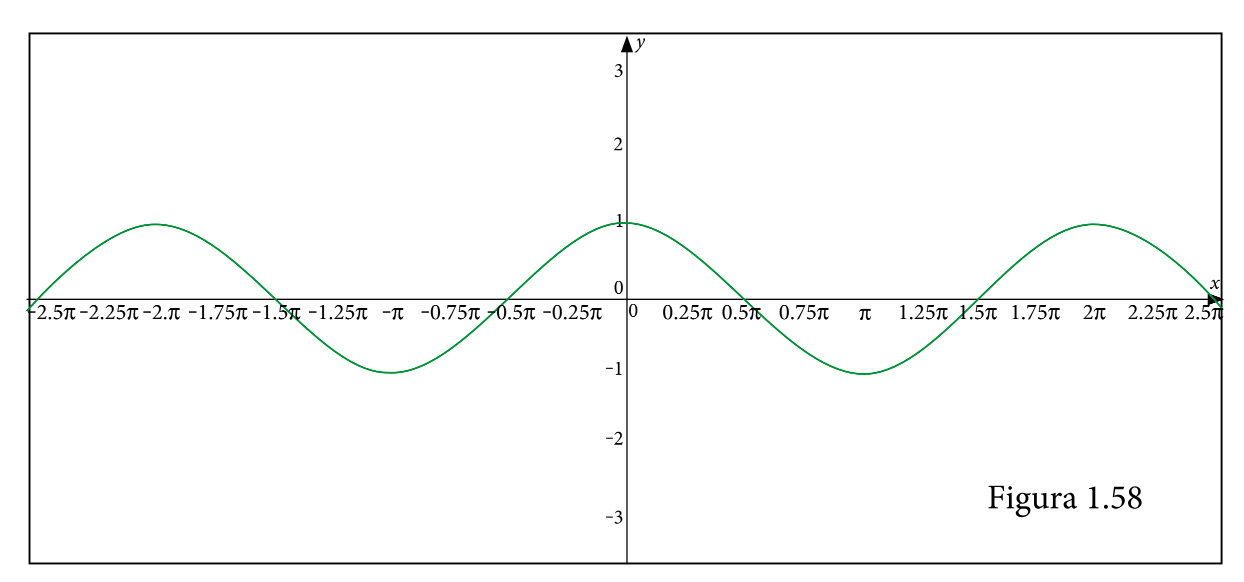


Figura 1.58

En resumen, las propiedades de la función coseno obtenidas a partir del gráfico son:

| | |
|---|---|
| Dominio: $\Re$ | La proyección de la gráfica cubre todo el eje "X". |
| Imagen: $[-1,1]$ | La proyección sobre el eje "Y" cubre este intervalo pues $\lvert\cos x\rvert \leq 1$. |
| Ceros: $x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z$ | En estos puntos $\cos x=0$ y la gráfica corta el eje "X" |
| Valor máximo: 1 | Es el extremo superior de la imagen. |
| Puntos de máximo $x = 2k\pi \;,\; k \in Z$ | En estos puntos $\cos x = 1$ |
| Valor mínimo: $-1$ | Es el extremo inferior de la imagen |
| Puntos de mínimo: $x = (2k+1)\pi \,,\, k \in Z$ | En estos puntos $\cos x = -1$ |
| Paridad: par | La gráfica es simétrica respecto al eje "Y" pues $\cos(-x) = \cos x$. |
| Periodo: $2k\pi \,,\, k \in Z$ | El gráfico se obtiene "repitiendo" cualquier selección de longitud $2k\pi \,,\, k \in Z$ |
| Monotonía: no es monótona | Se alternan intervalos de crecimiento y decrecimiento. |

Igual que la función seno, la función coseno es monótona, en cada cuadrante. El cuadro que sigue resume su variación en el intervalo fundamental $[0, 2\pi]$:

| subintervalo | $[0,\pi/2]$ I cuadrante | $[\pi/2,\pi]$ II cuadrante | $[\pi, 3\pi/2]$ III cuadrante | $[3\pi/2,2\pi]$ IV cuadrante |
|---|---|---|---|---|
| Variación | Decreciente 1 a 0 | Decreciente 0 a -1 | Creciente -1 a 0 | Creciente 0 a 1 |
| Signo | + | - | - | + |

Es creciente en los intervalos $[-\pi + 2k\pi, 2k\pi]$, y es decreciente en los intervalos $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$. Cuando $x$ se hace infinita, la función oscila de $+1$ a $-1$.

***Función arcocoseno:*** ***$y = arc\ cos(x)$***

Si restringimos el dominio de la función coseno al intervalo $[0, \pi]$ resulta inyectiva pues la ecuación $\cos(x) = a$, $a \in [-1,1]$ tiene una única solución en ese intervalo. También, $\cos(x_1) = \cos(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ cuando $x_1, x_2 \in [0,\pi]$.

Esto permite definir la función inversa del coseno que se llama arcocoseno y se denota $y = \arccos(x)$, a cada valor $x$ del intervalo $[-1,1]$ esta función le asigna un único valor $y$ en el intervalo $[0, \pi]$, la solución de la ecuación $\cos(y) = x$, es decir, $y = \arccos(x)$.

También se denota $\arccos(x)$ como $\cos^{-1}(x)$. De donde resulta que por propiedades de las funciones inversas: $\cos\left(\cos^{-1}(x)\right) = \cos^{-1}\left(\cos(x)\right) = x$.

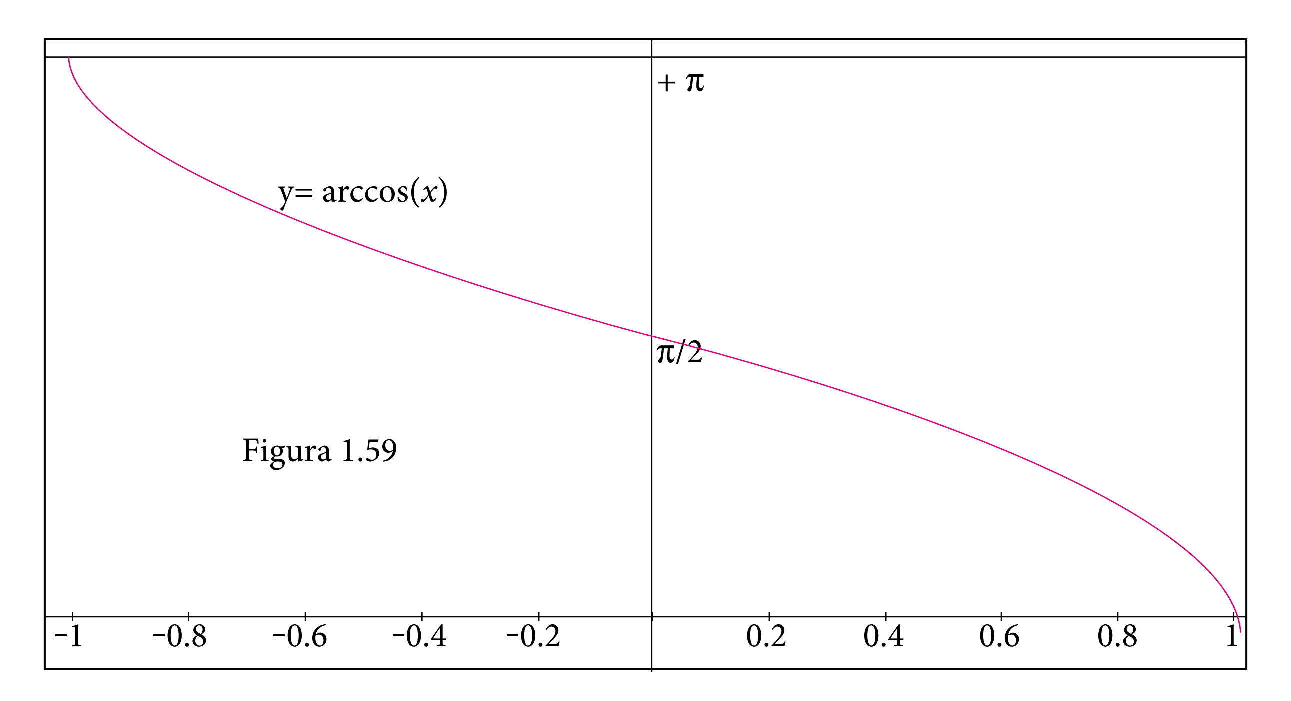


Figura 1.59

Del gráfico (Figura 1.59) inferimos **sus propiedades:** Su dominio es el intervalo $[-1,1]$ y su imagen es el intervalo $[0, \pi]$. Es monótona ya que esta función es decreciente en todo su dominio. Tiene un punto de mínimo absoluto en $x = 1$, el valor **mínimo es** 0, tiene un punto de máximo absoluto en $x = -1$ y su valor máximo es $\pi$. Tiene un único cero en $x = 1$. No es par ni tampoco impar.

***Función tangente: definición, representación gráfica y propiedades***

Se llama función **tangente** a la función que a cada número real $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ se le hace corresponder $y = \tan x$.

Como para la función tangente se cumple que: $\tan(\alpha+\pi) = \tan \alpha$ , basta representarla en un intervalo de longitud $\pi$. Como además, esta función no está definida en los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$, escogeremos el intervalo $(-\pi/2 , \pi/2)$ para trabajar en un intervalo en el que está definida en todos los puntos. Calculamos algunos valores y los representamos en la tabla siguiente:

| $x$ | $-\frac{5\pi}{12}$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{6}$ | $\frac{-\pi}{12}$ | 0 | $\frac{\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{12}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\tan x$ | -3.7 | - 1.7 | -1 | -0.58 | -0.27 | 0 | 0.27 | 0.58 | 1 | 1.7 | 3.7 |

Al representar en un sistema de coordenadas los pares contenidos en la tabla anterior, se obtiene una gráfica como la representada en la figura 1.60a.

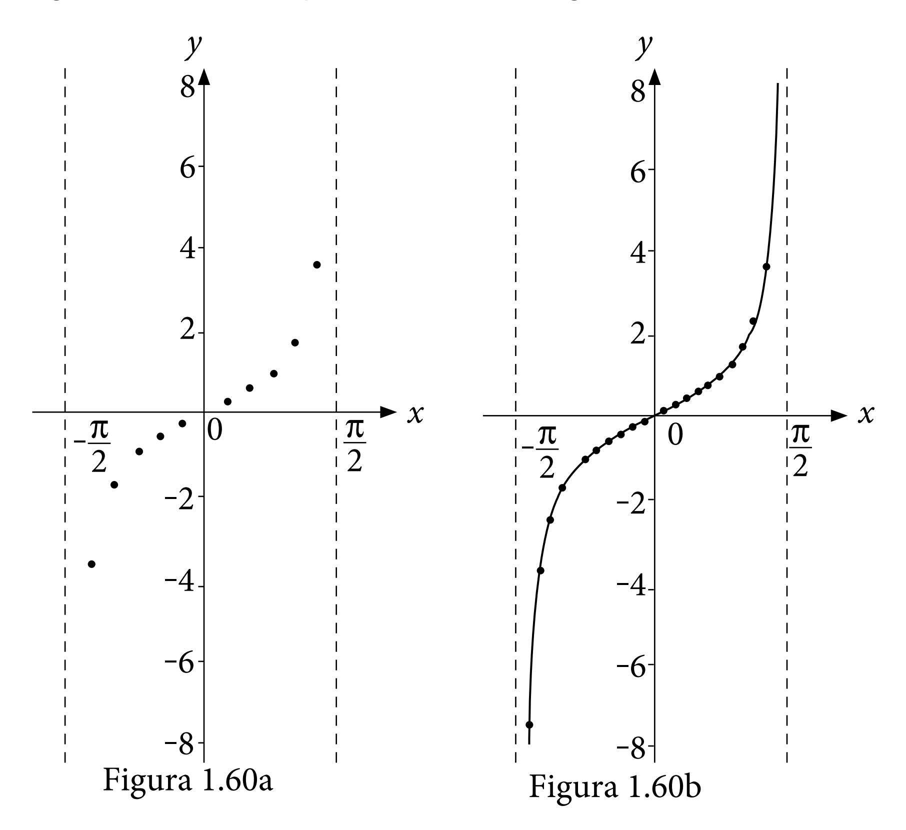


Figura 1.60a Figura 1.60b

Al igual que en las restantes funciones, si determinamos más puntos, como se ha hecho en la figura 1.60b donde se han determinado 12 puntos más, podemos tener una idea más aproximada de la gráfica. La gráfica de la función en todo $\Re$ se obtiene trasladando la gráfica obtenida en ambos sentidos indefinidamente. Además téngase en cuenta que $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ (Ver figura 1.61).

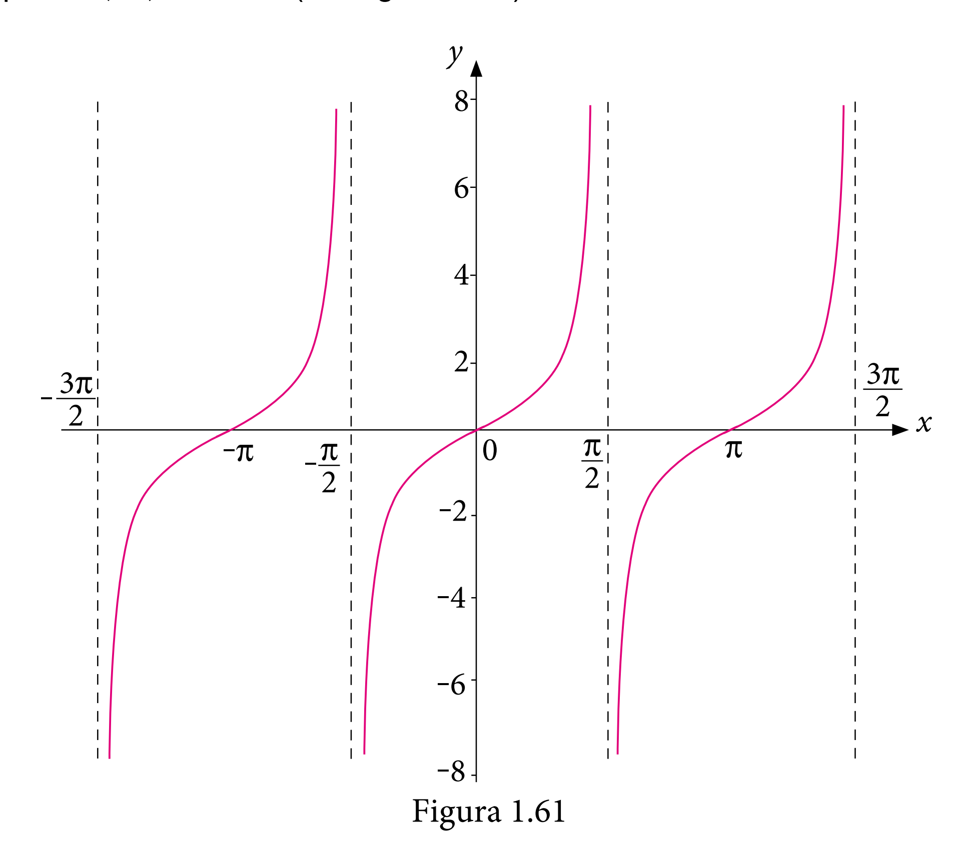



Figura 1.61

Al graficar $y = \tan x$ aparece una dificultad que no existe para las funciones seno y coseno: determinar cómo es la gráfica con $x$ próximo a $\pi/2$ y a $-\pi/2$.

Cuando $x$ se acerca a $+\infty$ o a $-\infty$ la función oscila de $+\infty$ a $-\infty$. Y la tabla siguiente permite apreciar el comportamiento de $y = \tan x$ cuando $x$ se acerca a $\pi/2$.

| $\tan(\pi/2-0.01)$ | $\tan(\pi/2-0.001)$ | $\tan(\pi/2-0.0001)$ | $\tan(\pi/2+0.1)$ | $\tan(\pi/2+0.01)$ | $\tan(\pi/2+0.001)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y = 100$ | $y = 1000$ | $y = 10000$ | $y = -10$ | $y = -100$ | $y = -1000$ |

Cuando $x$ se acerca a $\frac{\pi}{2}+k\pi$ por valores menores la función se hace muy grande en valor absoluto y positiva, "tiende a $+\infty$". Y cuando se acerca por valores mayores, la función se hace muy grande con valores negativos, tiende a $-\infty$. Estos resultados se escriben simbólicamente de la siguiente manera:

$$\tan(x) \xrightarrow[x\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^-]{} +\infty \qquad\qquad \tan(x) \xrightarrow[x\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^+]{} -\infty$$

De donde, las rectas $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ son sus **asíntotas.** La gráfica es entonces una curva que contiene todos los puntos obtenidos en la tabulación y se aproxima a las rectas perpendiculares al eje "X" en $\frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{2}$ indefinidamente sin llegar a tocarlas.

En resumen: en la gráfica de la función tangente se observan las siguientes propiedades:

| | |
|---|---|
| Dominio: $\Re - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z\right\}$ $= \left\{x \in \Re : x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z\right\}$ | La tangente no está definida en los puntos que excluimos, es decir, en los que la función coseno se anula. En otras palabras, la función tangente está formada por los pares ordenados: $(x, \tan x)$ con $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ |
| Imagen: $\Re$ | La proyección cubre el eje "Y" |
| Ceros: $x = k\pi \quad, k \in Z$ | En estos puntos la gráfica corta el eje "X": $\tan k\pi = 0$ |
| Valor máximo: no tiene | Toma todos los valores reales. |
| Valor mínimo: no tiene | Toma todos los valores reales. |
| Paridad: par | La gráfica es simétrica respecto al origen pues $\tan(-x) = -\tan x$. |
| Periodo: $k\pi$, $k \in Z$ | $\tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha$ |

En la gráfica (Fig. 1.61) se aprecia que en cada intervalo que no contiene múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$ la función es creciente; sin embargo, la tangente **no es monótona** porque al pasar de uno de esos intervalos a otro no crece. Por tanto, es creciente en los intervalos:

$$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$$

***Función arcotangente:*** $y = \arctan(x)$

Si restringimos el dominio de la función tangente al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ resulta inyectiva pues la ecuación $\tan(x) = a$, $a \in \Re$ tiene una única solución en ese intervalo. También, $\tan(x_1) = \tan(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ cuando $x_1, x_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Esto permite definir la función inversa de la tangente que se llama arcotangente y se denota $y = \arctan(x)$, a cada valor $x \in \Re$ esta función le asigna un único valor y en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, la solución de la ecuación $\tan(y) = x$, es decir, $y = \text{arc}\tan(x)$.

También se denota $\text{arc}\tan(x)$ como $\tan^{-1}(x)$. De donde resulta por la propiedad de la función inversa que: $\tan(\tan^{-1}(x)) = \tan^{-1}(\tan(x)) = x$.

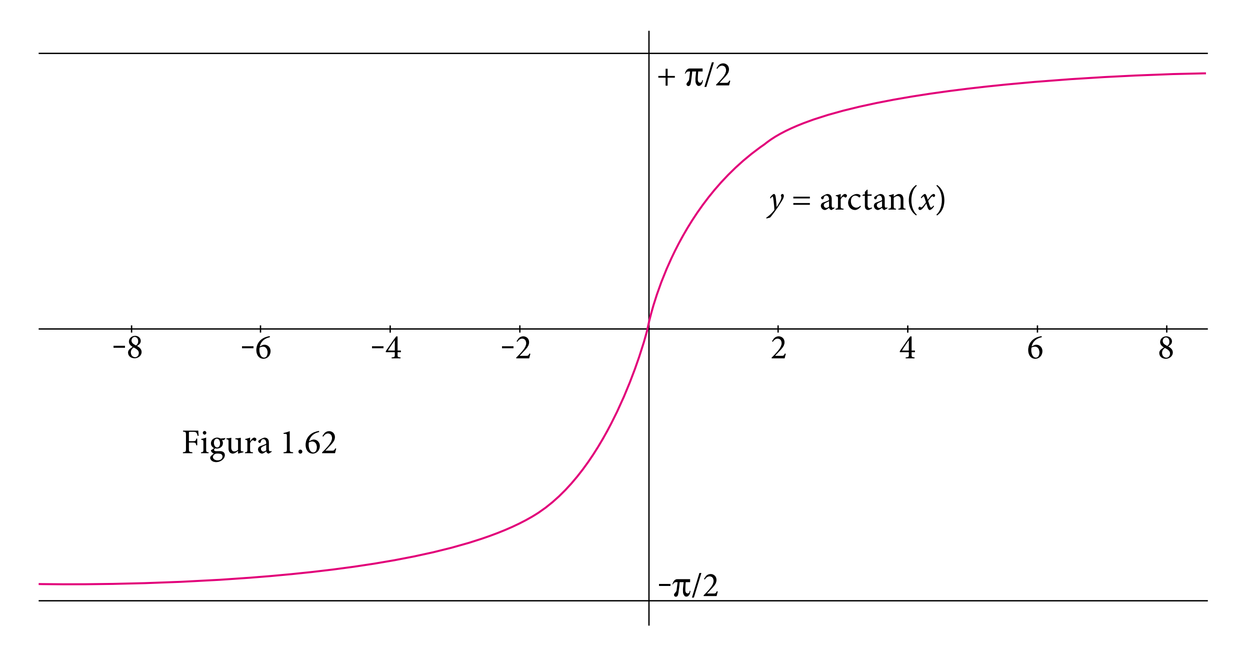


Figura 1.62

Del gráfico de $y = \arctan(x)$ inferimos sus propiedades (Figura 1.62): Su dominio es el conjunto de los reales $\Re$ y su imagen es el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Esta función es creciente en todo su dominio. No tiene punto de mínimo ni de máximo. Es impar, y por tanto simétrica respecto al origen de coordenadas. Tiene un único cero en $x$=0. La recta $y = -\frac{\pi}{2}$ es asíntota a la izquierda, es decir en $-\infty$ y la recta $y = \frac{\pi}{2}$ es asíntota a la derecha, es decir, en $+\infty$. En símbolos:

$$\arctan(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\frac{\pi}{2}^{+} \qquad \text{y} \qquad \arctan(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}^{-}$$

***Función cotangente: definición, representación gráfica y propiedades***

Se llama función **cotangente** a la función que a cada número real $\boldsymbol{x} \in \Re - \{k\pi \,/\, k \in Z\}$ le hace corresponder $y = \cot x$.

Para graficar la función cotangente se puede usar la función definida por la igualdad $\cot x = \frac{1}{\tan x}$, para los valores de $\boldsymbol{x}$ tales que $\tan x \neq 0$. Como $\mathbf{tan}\ \boldsymbol{x}$ tiene período $\pi$, basta representarla en un intervalo de longitud $\pi$ y como $\tan 0$=0 (la función $\cot x$ no está definida en 0); escogemos el intervalo $(0,\pi)$ donde la tangente no se anula para hacer la siguiente tabla:

| $x$ | $\frac{\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{7\pi}{12}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{11\pi}{12}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| cot $x$ | 3.7 | 1.7 | 1 | 0.58 | 0.27 | 0 | −0.28 | −0.58 | −1 | −1.7 | -3.7 |

Al representar en un sistema de coordenadas los pares contenidos en la tabla anterior, se obtiene una gráfica como la representada en la figura 1.63.

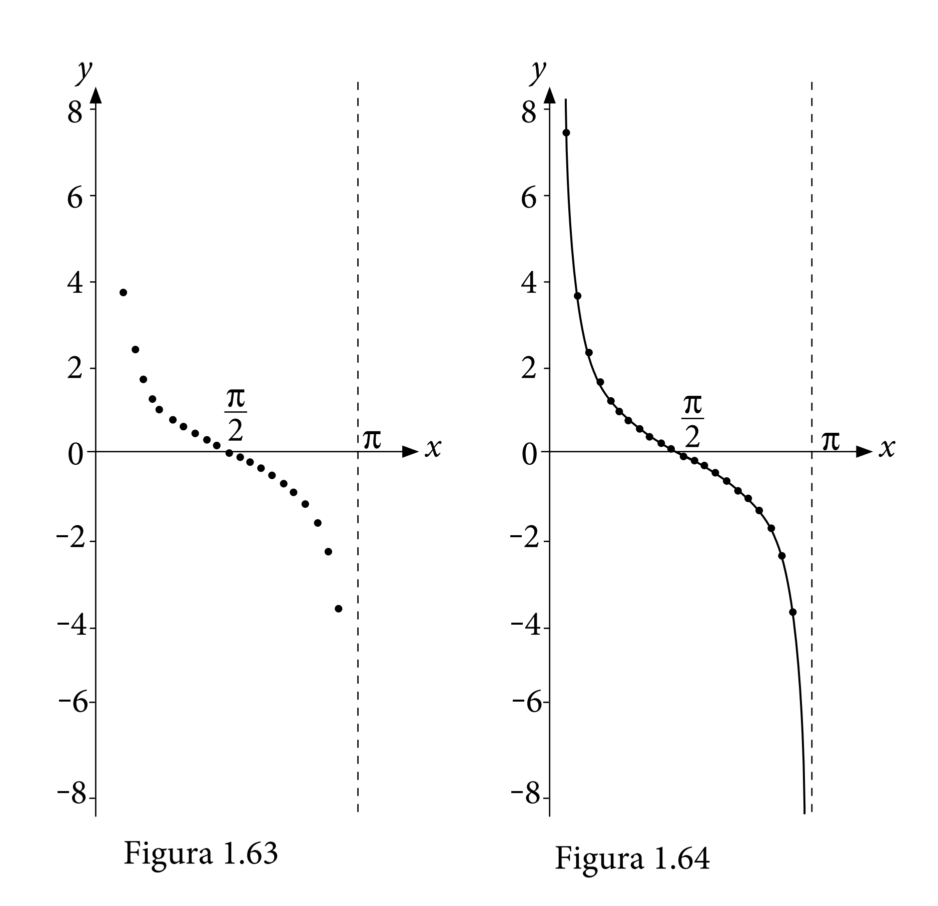



Figura 1.63

Figura 1.64

Como sabemos que la gráfica de la tangente es una curva; la gráfica de la nueva función debe ser una curva que contenga los puntos hallados en la tabla anterior (fig. 1.64). Como la función es periódica de periodo $\pi$, tasladando la gráfica obtenida en ambos sentidos se obtiene la gráfica pedida (fig. 1.65).

En la gráfica se observa que cuando $x$ se acerca a $+\infty$ o a $-\infty$ la función oscila de $+\infty$ a $-\infty$, y también que las asíntotas son las rectas $x = 0$ y $x = \pi$.

O sea, las rectas $x = k\pi$ son asíntotas de la función, y cuando $x$ se acerca a $k\pi$ por valores menores la función se hace muy grande en valor absoluto y negativa, "tiende a $-\infty$", lo escribimos así: $\cot(x) \xrightarrow[x \to k\pi^-]{} -\infty$ . Cuando se acerca por valores mayores, la función se hace muy grande con valores positivos, tiende a $+\infty$, y lo escribimos como:

$$\cot(x) \xrightarrow[x \to k\pi^+]{} +\infty$$

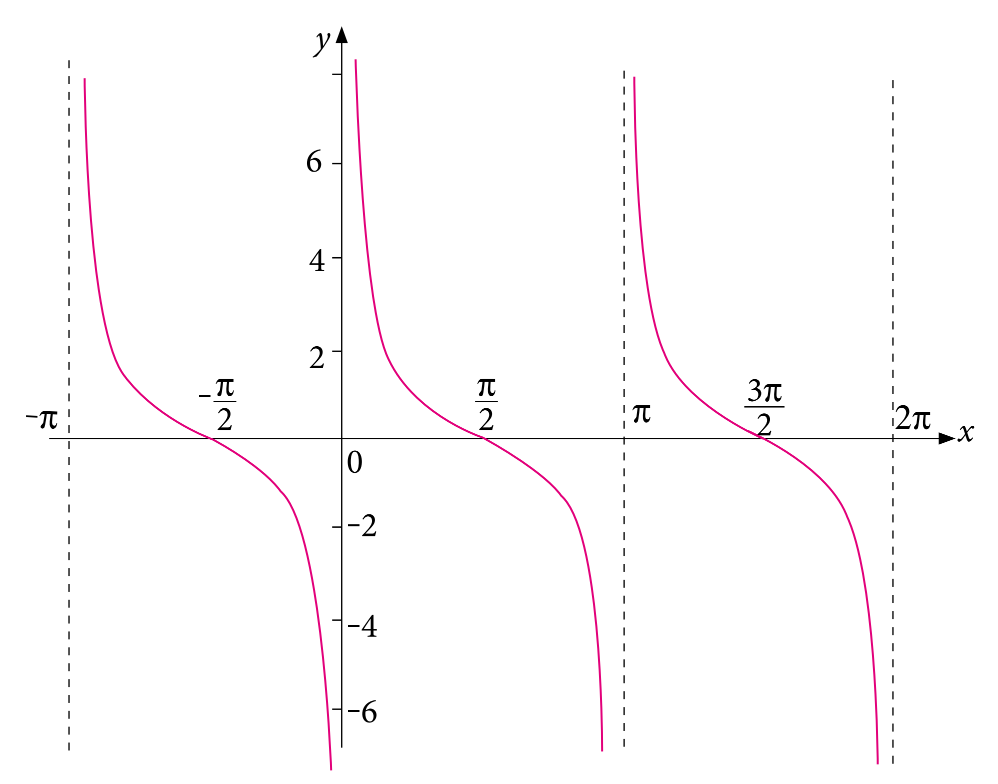



Figura 1.65

**Resumiendo:** las siguientes propiedades de $\boldsymbol{y = \cot(x)}$ pueden inferirse de la observación directa de su gráfica mostrada en la figura 1.65:

| | |
|---|---|
| Dominio: $\Re - \{k\pi /\ k \in Z\}$ | En los puntos excluidos: $\tan x = 0$ |
| Imagen: $\Re$ | La proyección cubre el eje "Y" |
| Ceros: $x = (2k+1)\ \frac{\pi}{2};\ k \in Z$ | En estos puntos la gráfica corta el eje "X": $\cot(2k+1)\ \frac{\pi}{2} = 0$ |
| Valor máximo: no tiene | Toma todos los valores reales. |
| Valor mínimo: no tiene | Toma todos los valores reales. |
| Paridad: impar | La gráfica es simétrica respecto al origen ya que: $\cot(-x) = \dfrac{1}{\tan(-x)} = -\dfrac{1}{\tan(x)} = -\cot(x)$ |
| Periodo: $\pi$ | La gráfica se repite en $k\pi$, $k \in Z$: $\cot(\alpha + k\pi) = \cot \alpha$ |
| Monotonía: no es monótona | En cada intervalo que no contiene puntos de indefinición es decreciente. Así pues, es decreciente en los intervalos: $[-\pi + k\pi\ ,\ k\pi]$ |

***Función arcocotangente:*** $y = arccot(x)$

Si restringimos el dominio de la función cotangente al intervalo $[0, \pi]$ resulta inyectiva pues la ecuación $\cot(x) = a$, $a \in \Re$ tiene una única solución en ese intervalo. También, $\cot(x_1) = \cot(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ cuando $x_1, x_2 \in [0,\pi]$.

Esto permite definir la función inversa de la cotangente que se llama arcocotangente y se denota $y = \text{arc}\cot(x)$, a cada valor $x \in \Re$ esta función le asigna un único valor $y$ en el intervalo $(0,\pi)$, la solución de la ecuación $\cot(y) = x$, es decir, $y = \text{arc}\cot(x)$.

También se denota $\text{arc}\cot(x)$ como $\cot^{-1}(x)$, de donde por propiedad de la función inversa resulta que: $\cot(\cot^{-1}(x)) = \cot^{-1}(\cot(x)) = x$

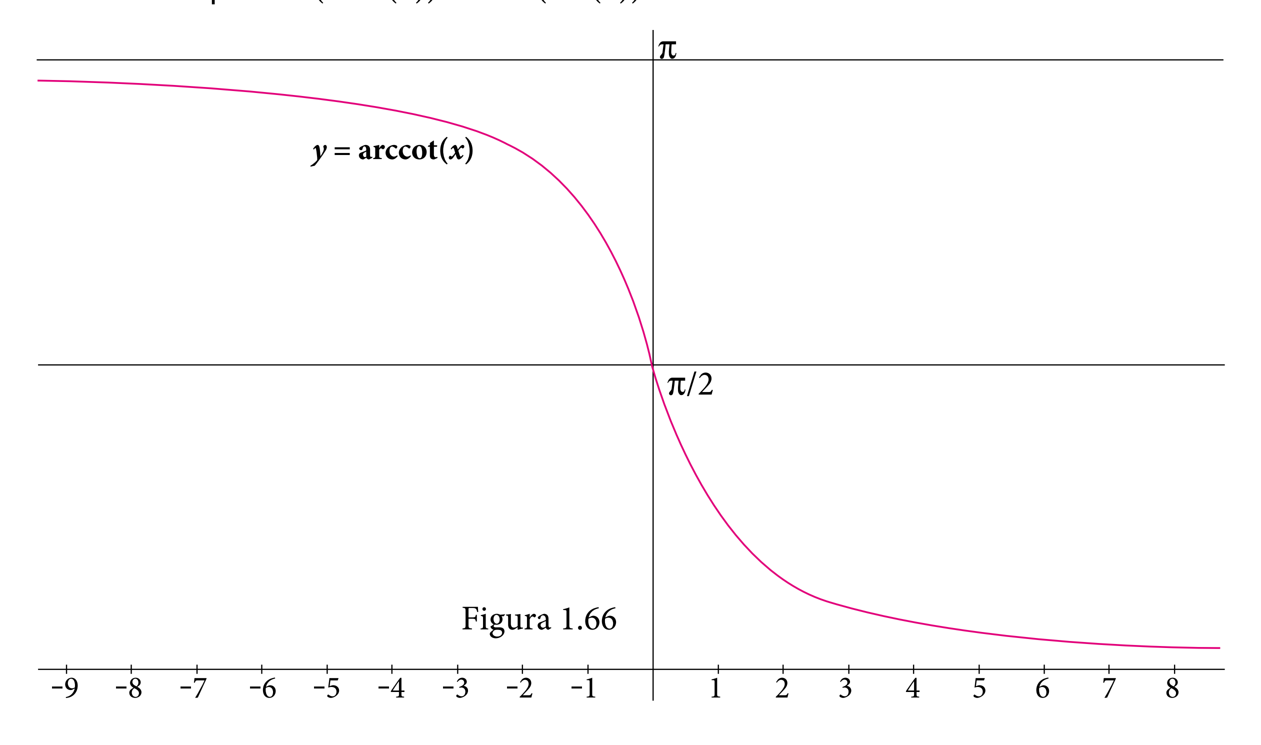


Figura 1.66

Del gráfico (Figura 1.66) inferimos **sus propiedades:**

Su dominio es $\Re$ y su imagen es el intervalo $(0, \pi)$. Esta función es decreciente en todo su dominio. No tiene punto de mínimo ni de máximo. No tiene ceros. La recta $y = \pi$ es asíntota a la izquierda, es decir en $-\infty$, y la recta $y = 0$ es asíntota a la derecha, es decir, en $+\infty$. En símbolos:

$$\text{arc}\cot(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} \pi^- \quad \text{y} \quad \text{arc}\cot(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0^+$$

***Función cosecante: definición, representación gráfica y propiedades***

Se llama función **cosecante** a la función que a cada número real $\boldsymbol{x} \in \Re - \{k\pi / k \in Z\}$ le hace corresponder $y = \csc x$.

Muchas veces para graficar la cosecante se utiliza la función definida por la igualdad $\csc x = \dfrac{1}{\text{sen } x}$ , para los valores de $x$ tales que sen $x \neq 0$. Como **sen *x*** tiene período $2\pi$, entonces la función $\boldsymbol{\csc x}$ también tendrá este período, de acuerdo a como se ha definido a partir del seno.

Luego basta representarla en un intervalo de longitud $2\pi$, tomamos el intervalo $[0, 2\pi]$ y trasladamos el gráfico correspondiente en ambos sentidos tantas veces como sea necesario.

Pero antes de proceder a calcular algunos valores de la función $\boldsymbol{\csc x}$ es muy importante tener en cuenta que la función no está definida en los ceros de la función seno; o sea, los valores $x = k\pi,\ k \in Z$ ; no pertenecen al dominio de $\boldsymbol{\csc x}$.

Calculamos ahora algunos valores de csc x y los representamos en la tabla siguiente:

| $x$ | $\frac{\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{12}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $\frac{23\pi}{12}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\csc x$ | 3.85 | 2 | 1.41 | 1.15 | 1 | 1.41 | -1.41 | -1 | -1.15 | -1.41 | -2 | -3.85 |

Desde luego, signo $(\csc x)$ = signo $(\text{sen } x)$.

Observa que esta función no tiene ceros, pues se ha definido a partir de una “fracción” con numerador $1 \neq 0$; luego para todo $x \in \boldsymbol{Dom}\ (\boldsymbol{\csc})$, $\csc x \neq 0$, y su gráfica no corta al eje “X”. Pero no sólo no corta al eje “X”, sino que para todo $x \in \boldsymbol{Dom}\ (\boldsymbol{\csc})$, $\csc x \leq -1$ o $\csc x \geq 1$, o sea, $|\csc x| \geq 1$; pues $|\text{sen } x| \leq 1$ y $1$ entre un número cuyo módulo es menor o igual que 1, da por resultado un valor cuyo módulo es mayor o igual que 1 (compara con los valores de la tabla).

No tiene valor máximo absoluto, pues toma todos los valores reales mayores que $1$; ni valor mínimo absoluto, pues ocurre lo mismo con todos los valores reales menores que $-1$. Pero si tiene máximos y mínimos relativos.

La función cosecante es impar, tiene la misma paridad del seno, a partir de como ha sido definida; $\csc(-x) = -\csc x$. Esbocemos la gráfica de $\boldsymbol{y = \csc x}$ (fig. 1.67):

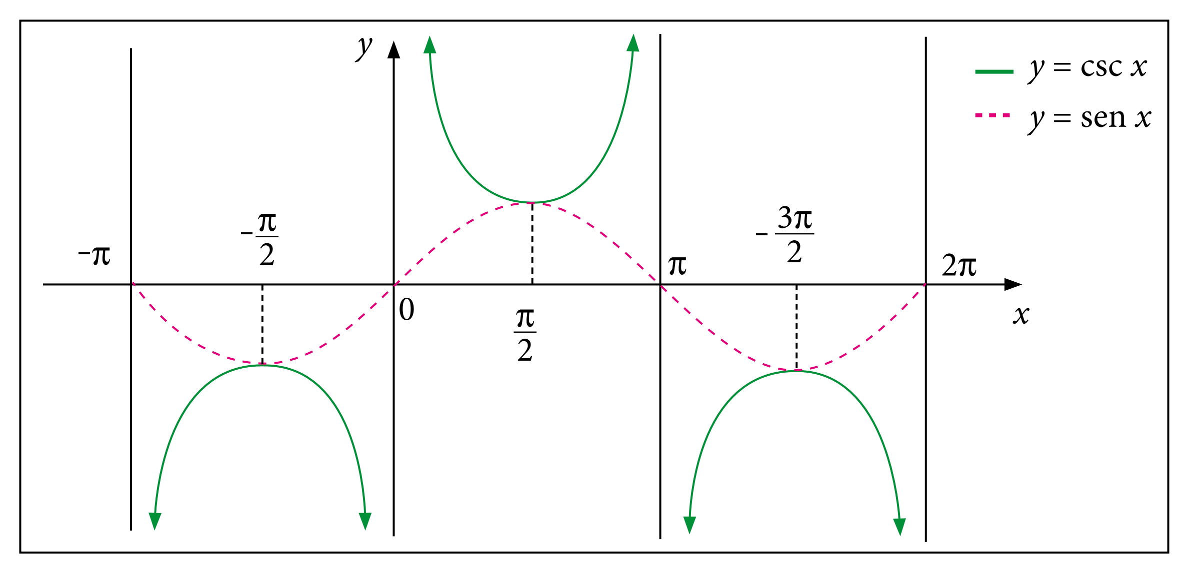



Figura 1.67

Esta función no es monótona, en cada intervalo donde está definida, se alternan subintervalos de crecimiento y decrecimiento. Por ejemplo, en el intervalo $(0, \pi)$ en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ decrece y en $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ crece. Así que es decreciente en los intervalos: $\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi\right)$ y $\left(2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$. Y es creciente en los intervalos: $\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \pi\right)$ y $\left(2k\pi + \pi, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right)$

Sus puntos de máximo relativo son: $\left\{x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \,/ k \in Z\right\}$ de valor máximo: -1.

Sus puntos de mínimo relativo son: $\left\{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \,/ k \in Z\right\}$ de valor mínimo: 1

La función es periódica de periodo $2\pi$ .Y oscila de $+\infty$ a $-\infty$ tanto cuando $x$ tiende a $+\infty$ como a $-\infty$:

$$\csc(x) \xrightarrow[x \to (\pi + 2k\pi)^-]{} +\infty \qquad \csc(x) \xrightarrow[x \to (\pi + 2k\pi)^+]{} -\infty$$

$$\csc(x) \xrightarrow[x \to 2k\pi^-]{} -\infty \qquad \csc(x) \xrightarrow[x \to 2k\pi^+]{} +\infty$$

Resumamos algunas de **sus propiedades** en el siguiente cuadro:

| | |
|---|---|
| Dominio: $\Re - \{x = k\pi : k \in Z$ | No está definida en los ceros del seno. |
| Imagen: $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty) = \Re - (-1,1)$ | Pues $\lvert \csc x \rvert \geq 1$ |
| No tiene ceros | Consecuencia de lo anterior, la gráfica de $\csc x$ no corta al eje "X" |
| Valor máximo absoluto: no tiene | Toma todos los y reales, $y \geq 1$ |
| Valor mínimo absoluto: no tiene | Toma todos los y reales, $y \leq -1$ |
| Paridad: impar | La gráfica es simétrica respecto al origen pues $\csc(-x) = \dfrac{1}{\text{sen}(-x)} = -\dfrac{1}{\text{sen}(x)} = -\csc(x)$ |
| Monotonía: no es monótona | En el dominio se alternan intervalos de crecimiento y decrecimiento. |
| Periodo: $2\pi$ | $\csc(x+2k\pi) = \csc x\,,\ k \in Z$ |

***Función arcocosecante:*** $y = arc\ csc(x)$

Si restringimos el dominio de la función cosecante a los intervalos $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ y $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ resulta inyectiva pues la ecuación $\csc(x) = a,\ a \in \Re - (-1,1)$ tiene una única solución en esos intervalos. También, $\csc(x_1) = \csc(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ cuando $x_1, x_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Esto permite definir la función inversa de la cosecante que se llama arcocosecante y se denota $y = \text{arc}\cos(x)$, a cada valor $x \in \Re - (-1,1)$ esta función le asigna un único valor "$y$" en los intervalos $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, la solución de la ecuación $\csc(y) = x$, es decir, $y = \text{arc}\csc(x)$.

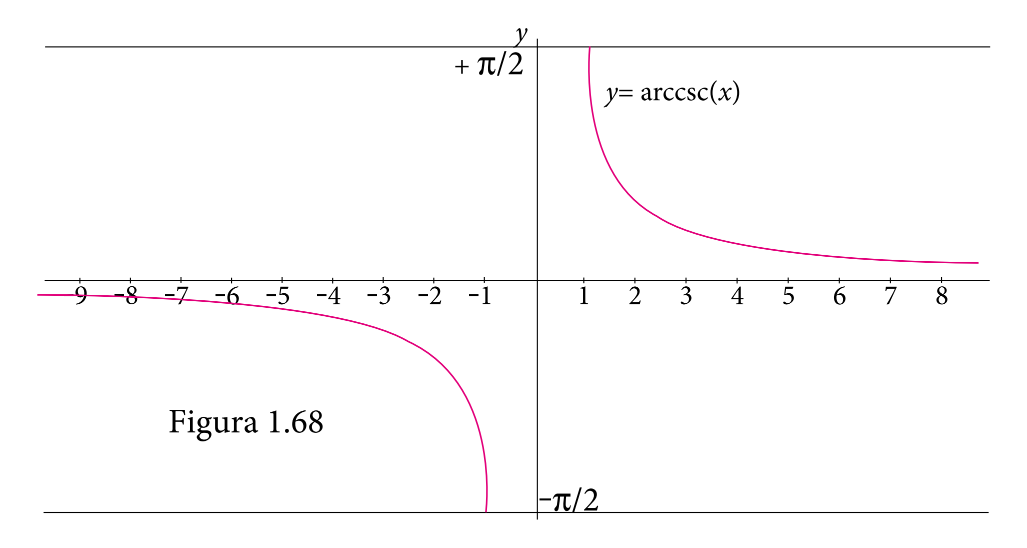



Figura 1.68

También se denota $\text{arc csc}(x)$ como $\csc^{-1}(x)$, y por propiedad de la función inversa resulta que: $\csc(\csc^{-1}(x)) = \csc^{-1}(\csc(x)) = x$.

Del gráfico (Figura 1.68) de arcocosecante inferimos sus propiedades: Esta función es decreciente en los intervalos $(-\infty,0]$ y $[1,\infty)$ porque la cosecante es decreciente en los intervalos $\left[-\frac{\pi}{2},0\right) \cup \left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ ; no tiene punto de mínimo ni de máximo. No tiene ceros. La recta $y = 0$ es asíntota bilateral, es decir: $\text{arc csc}(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0^-$ y $\text{arc csc}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0^+$.

***Función secante: definición, representación gráfica y propiedades***

Se llama función **secante** a la función que a cada número real $\boldsymbol{x} \in \Re - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,/ k \in Z\right\}$, le hace corresponder $y = \text{sen}\ x$.

Para graficarla usaremos la función definida por la igualdad $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ , para los valores de $x$ tales que $\cos x \neq 0$. Como $\cos x$ tiene período $2\pi$, entonces la función $\sec x$ también tendrá este período, de acuerdo a como se ha definido a partir del coseno. Luego basta representarla en un intervalo de longitud $2\pi$, tomamos el intervalo $[0, 2\pi]$ y trasladamos el gráfico correspondiente en ambos sentidos tantas veces como sea necesario.

Pero antes de proceder a calcular algunos valores de la función $\mathbf{sec}\ \boldsymbol{x}$ es muy importante tener presente que la función no está definida en los ceros de la función coseno; o sea, los valores $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , $k \in Z$ ; no pertenecen al dominio de $\mathbf{sec}\ \boldsymbol{x}$. Calculamos ahora algunos valores de $\sec x$ y los representamos en la tabla siguiente:

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{12}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\pi$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{17\pi}{12}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{11\pi}{6}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sec x$ | 1 | 1.15 | 2 | 3.85 | -2 | -1.41 | -1 | -1.15 | -2 | -3.85 | 2 | 1.15 |

Observa que esta función no tiene ceros, pues se ha definido a partir de una "fracción" con numerador $1 \neq 0$ ; luego para todo $x \in \boldsymbol{Dom}\ (\mathbf{sec})$, $\sec x \neq 0$, y su gráfica no corta al eje "$x$".

Aún más, para todo $x \in \boldsymbol{Dom}\ (\mathbf{sec})$, $\sec x \leq -1$ o $\sec x \geq 1$ , o sea, $|\sec x| \geq 1$; pues $|\cos x| \leq 1$ y 1 entre un número cuyo módulo es menor o igual que 1,da por resultado un valor cuyo módulo es mayor o igual que 1.

La imagen de la secante queda fuera del intervalo $(-1, 1)$ que contiene a cero (compara con los valores de la tabla). Esbocemos la gráfica de $\boldsymbol{y} = \mathbf{sec}\ \boldsymbol{x}$ (figura 1.69):

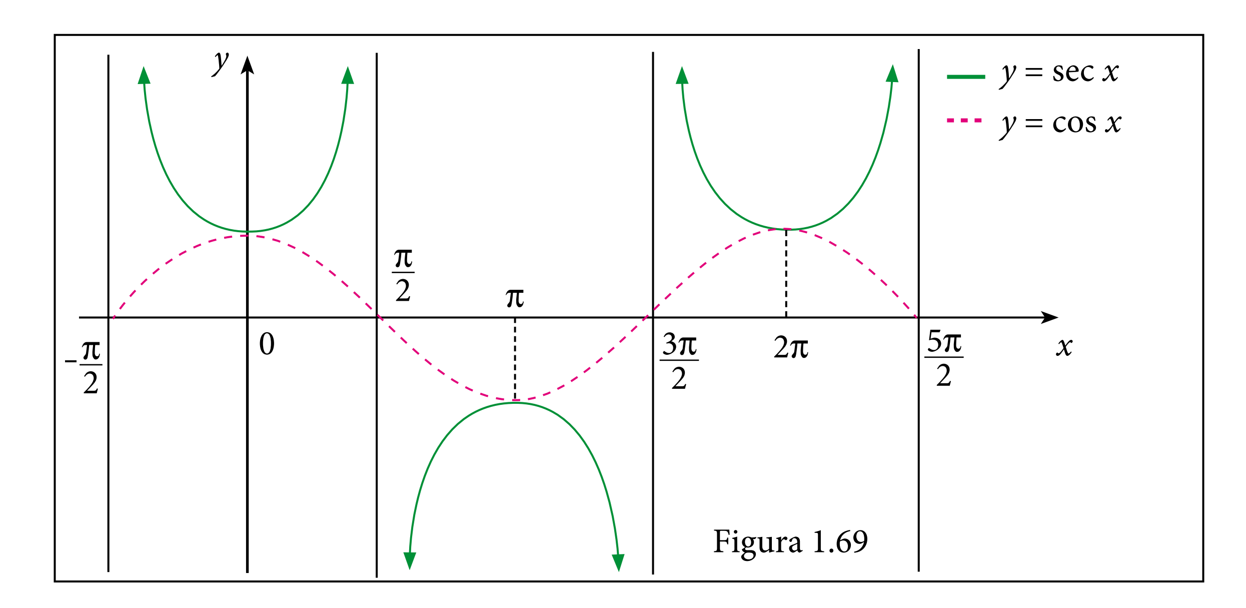


Figura 1.69

No tiene valor máximo absoluto, pues toma todos los valores reales mayores que $1$; ni valor mínimo absoluto, pues ocurre lo mismo con todos los valores reales menores que $-1$. Aunque si tiene valores máximos y mínimos relativos. Y sus puntos de máximo relativo son: $\{x = \pi + 2k\pi \,/ k \in \mathbb{Z}\}$ y su valor máximo es: $y = -1$. Y sus puntos de mínimo relativo son: $\{x = 2k\pi \,/ k \in \mathbb{Z}\}$ y su valor mínimo es: $y = 1$.

La función secante es par, pues "hereda" la paridad del coseno, a partir de como ha sido definida; $\sec(-x) = \sec x$ y su gráfica es simétrica respecto al eje "Y".

Esta función no es monótona, en cada intervalo donde está definida, se alternan subintervalos de crecimiento y decrecimiento. Por ejemplo, en el intervalo:

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ y } \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right] \textit{ decrece y en } \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ crece}$$

Es creciente en los intervalos: $\left(2k\pi\,, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \pi\right)$

Es decreciente en los intervalos: $\left(2k\pi + \pi, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right)$ , $\left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}, 2(k+1)\pi\right)$

La función es periódica de periodo $2\pi$. Y oscila de $+\infty$ a $-\infty$ tanto cuando $x$ tiende a $+\infty$ como a $-\infty$: $\sec(x) \xrightarrow[x \to \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^-]{} +\infty$ $\quad \sec(x) \xrightarrow[x \to \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^+]{} -\infty$

$$\sec(x) \xrightarrow[x \to \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)^-]{} -\infty \qquad \sec(x) \xrightarrow[x \to \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)^+]{} +\infty$$

Resumamos algunas de **sus propiedades** en el siguiente cuadro:

| | |
|---|---|
| Dominio: $\Re - \left\{(2k+1)\ \frac{\pi}{2} k \in Z\right\}$ | No está definida en los ceros del coseno. |
| Imagen: $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty) = \Re - (-1,1)$ | Pues $\lvert \sec x \rvert \geq 1$ |
| No tiene ceros | Consecuencia de lo anterior, la gráfica de $\sec x$ no corta al eje "X" |
| Valor máximo absoluto: no tiene | Toma todos los y reales, $y \geq 1$ |
| Valor mínimo absoluto: no tiene | Toma todos los y reales, $y \leq -1$ |
| Paridad: Es par | La gráfica es simétrica respecto al eje "Y" pues: $\sec(-x) = \dfrac{1}{\cos(-x)} = \dfrac{1}{\cos(x)} = \sec(x)$ |
| Monotonía: no es monótona | En el dominio se alternan intervalos de crecimiento y decrecimiento. |
| Periodo: $2k\pi,\ k \in Z$ | $\sec(x+2k\pi) = \sec x,\ k \in Z$ |

**Función arcosecante: $y = \mathrm{arcsec}(x)$**

Si restringimos el dominio de la función secante a los intervalos $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ y $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ resulta inyectiva pues la ecuación $\sec(x) = a,\ a \in \Re - (-1, 1)$ tiene una única solución en esos intervalos. También, $\sec(x_1) = \sec(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ cuando $x_1, x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Esto permite definir la función inversa de la secante que se llama **arcosecante** y se denota por $y = \mathrm{arc\ sec}(x)$. A cada valor $x \in \Re - (-1,1)$ esta función le asigna un único valor "$y$" en los intervalos $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, la solución de la ecuación $\sec(y) = x$, es decir, $y = \mathrm{arc\ sec}(x)$.

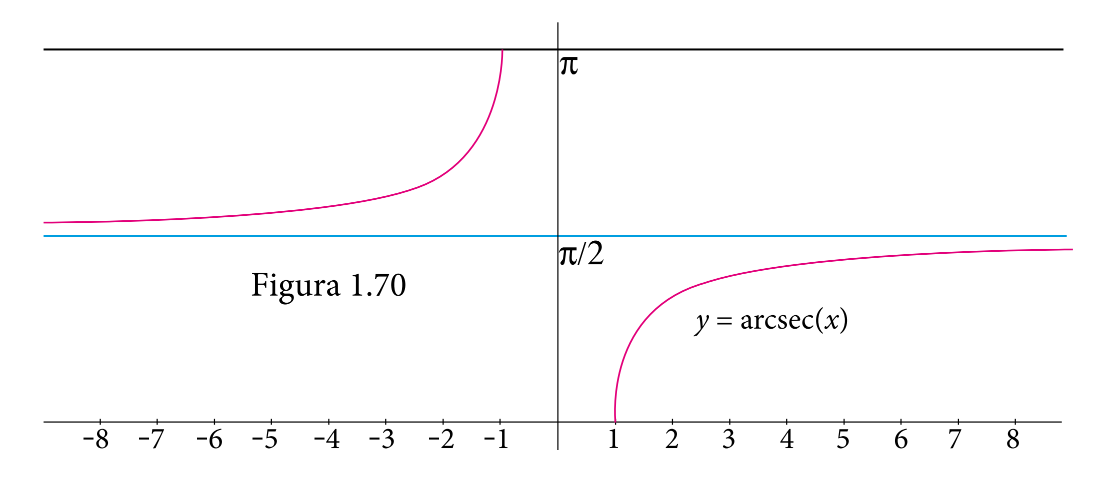


Figura 1.70

También se denota $\text{arc sec}(x)$ como $\sec^{-1}(x)$, y por propiedad de la función inversa resulta que: $\sec(\sec^{-1}(x)) = \sec^{-1}(\sec(x)) = x$.

Del gráfico (Figura 1.70) anterior inferimos **sus propiedades:** Su dominio es el conjunto $\Re - (-1, 1)$ y su imagen es los intervalos $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Esta función es creciente en los intervalos $(-\infty, -1]$ y $[1, \infty)$ porque la secante es creciente en los intervalos $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$; no tiene punto de mínimo ni de máximo. Tiene un cero en $x = 1$. Tiene un valor máximo absoluto $y = \pi$ y un valor mínimo absoluto $y = 0$. La recta $y = \pi/2$ es asíntota a la izquierda, es decir en $-\infty$, y también es asíntota a la derecha, es decir, en $+\infty$. En símbolos: $\text{arc sec}(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} \pi/2$ .

**Ejemplo 68:** Determina las siguientes funciones trigonométricas

**a)** $\mathbf{sen(arcsen(}x\mathbf{))}$ **b)** $\mathbf{arcsen\left(sen\left(\frac{5\pi}{2}\right)\right)}$ **c)** $\mathbf{cos(arc\ cos(}x\mathbf{))}$

**d)** $\mathbf{cos(arcsen(}x\mathbf{))}$ **e)** $\mathbf{sen(arccos(}x\mathbf{))}$

**Resolución:**

a) arcsen(x) es el ángulo en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, cuyo seno es $x$, luego $\text{sen}(\text{arcsen}(x)) = x$.

b) $\text{arcsen}\left(\text{sen}\frac{5\pi}{2}\right) = \text{arcsen}\left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \text{arcsen}(1) = \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} - 2\pi$ , en general si

$k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{2}$, entonces $\text{arcsen}(\text{sen}(x)) = (-1)^k(x - k\pi)$, con lo que ratificamos que estas funciones son inversas sólo cuando el seno está restringido al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

c) $\arccos(x)$ es el ángulo en el intervalo $[0, \pi]$ cuyo coseno es $x$, es decir, $\cos(\arccos(x)) = x$.

d) $\text{arcsen}(x) = y \Rightarrow \text{sen}(y) = x$, hay que tratar de escribir la relación utilizando el coseno que es la inversa del arcocoseno, para hacerlo aprovechamos la identidad de Pitágoras, luego $\text{sen}^2(y) = x^2$, $1 - \cos^2(y) = x^2$ y, por tanto, $\cos(y) = \sqrt{1-x^2}$, o sea, $\cos(\text{arcsen}(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

e) $\arccos(x) = y \Rightarrow \cos(y) = x$, luego $\cos^2(y) = x^2$ , $\text{sen}^2(y) = 1 - x^2$, por tanto, $\text{sen}(y) = \sqrt{1-x^2}$ , o sea, $\text{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$

**Ejemplo 69:** Un Tsunami es una gran ola que puede ser ocasionada por un terremoto bajo el mar, pueden medir hasta más de 100 pies de altura y viajar a grandes velocidades. Los ingenieros marítimos representan (modelan) estas olas por funciones trigonométricas de la forma: $y = a\cos(b \cdot t)$ y las utilizan para calcular la efectividad de los muros rompeolas. O sea, la expresión que modela el movimiento de las olas de un Tsunami es: $y = a\cos(b \cdot t)$.

Supongamos que una ola en el instante $t = 0$ tiene una altura de $y = 40$ pies, viaja a razón de 190 pies por segundo con un periodo de 30 min. Como para $t = 0$, $y = 40$ pies, entonces en este caso:

$$40 = a\cos(b \cdot 0) = a\cos(0) = a(1) = a \quad \Rightarrow y = 40\cos(b \cdot t)$$

Y como el periodo del coseno es de $2\pi = 30$ min, entonces:

$2\pi = b \cdot 30 \text{ min} \Rightarrow b = \dfrac{2\pi}{30} = \dfrac{\pi}{15}$. Por tanto, la función que modela el movimiento de un Tsunami de estas características es: $y = 40\cos\left(\dfrac{\pi}{15} \cdot t\right)$. (Esboza su gráfica usando un procesador o graficador).

Además, como recorre 190 pies en un segundo, recorrerá 11400 pies en un minuto. La longitud de onda es la distancia entre dos crestas consecutivas, como el periodo es 30 min., en 30 minutos recorrerá: $(11400)(30) = 342000$ pies.

***ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE:*** 

**Act-115)** En base a la definición de las razones trigonométricas demuestra los resultados de la tabla siguiente:

| $\alpha$ | $0°$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ | $90°$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\text{sen}\,\alpha$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
| $\cos\alpha$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\tan\alpha$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | Indefinida |

**Act-116)** Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{\text{sen } 30°}{\cos 45°} + \dfrac{\cos 30° + \tan 60°}{\cos 315° \times \tan 135°} =$

b) $\dfrac{\text{sen}^2 150° + \cos^2 30° - \tan 45°}{\cot 45°} =$

c) $\dfrac{\text{sen }(-30)° + \cos(-60)°}{\tan(-60)° \times \tan(-30)°} =$

d) $\dfrac{1 + \tan(-45)° - \text{sen } 0°}{(\cos 0° \times \text{sen } 30)° - \cos 90°} =$

e) $\dfrac{\text{sen } 30°}{\cos 45°} + \dfrac{8\tan^2 45°}{4\text{sen}90°} =$

f) $(\text{sen } 60)° \, [\text{sen}^2 60° + \cos^2 60°] =$

g) $\cot 60)° - \dfrac{\sec^2 45°}{\csc^2 45°} \cos 30° =$

h) $\csc^2 30° - 2\cot^2 30° =$

**Act-117)** Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones:

a) $\arccos\left(\dfrac{1}{2}\right) =$

b) $\arctan\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) =$

c) $\text{arcsen}(-1) =$

d) $\text{arcsec}(-2) =$

e) $\text{arccsc}(2) =$

f) $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) =$

g) $\text{arcsen}\left(-\sqrt{\dfrac{3}{3}}\right) =$

h) $\arctan(-1) =$

i) $\cot\left(\text{arcsen}\left(\dfrac{1}{2}\right)\right) =$

j) $\cos\left(\text{arcsen}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) =$

k) $\text{sen}\left(\arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) =$

l) $\tan\left(\text{arcsen}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) =$

m) $\text{sen}\left(\arccos\left(\dfrac{1}{2}\right)\right) =$

**Act-118)** Comprueba o verifica las siguientes identidades

a) $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sec\alpha}$

b) $\text{sen }\alpha = \dfrac{1}{\csc\alpha}$

c) $\tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha}$

d) $\tan\alpha = \dfrac{\text{sen }\alpha}{\cos\alpha}$

e) $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\text{sen }\alpha}$

f) $\tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha}$

g) $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

h) $\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$

i) $\cot^2\alpha + 1 = \csc^2\alpha$

j) $\text{arcsen}(-x) = \text{arcsen}(x)$

k) $\dfrac{1}{\csc x} - \tan x \cdot \text{sen } x = \cos x$ ; $(x \neq 90°)$.

**Act-119)** A partir de su representación gráfica (obtenida con un procesador) analiza el comportamiento de las funciones:

a) $y = \text{sen}(x - 3)$ b) $y = \text{sen}(x) + 3$ c) $f(x) = \cos(x - 4)$

d) $f(x) = 3\cos(x)$ e) $f(x) = \tan(x - \pi)$ f) $f(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

g) $f(x) = \cot(x + \pi)$ h) $f(x) = 2 + \cot\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ i) $f(x) = \sec(x - 3\pi)$

j) $f(x) = 3\sec(x) + 4$ k) $f(x) = \csc(3x)$ l) $f(x) = \csc(2x - \pi)$

m) $y = 1 + \text{arcsen}(x)$ n) $y = \arccos(x - 2)$ ñ) $y = \arctan(x + 1)$

**Act-120)** Determina el valor del ángulo $x$ en las siguientes ecuaciones:

a) $\cos x = \cos^2 x$ b) $2\text{sen}^2 x + 3\cos x = 0$ c) $\tan^2 x + \dfrac{1}{\cos x} = 1$

d) $\tan^2 x - \sqrt{3}\tan x = 0$ e) $2\text{sen}^2 x - \cos^2 x = 2$ f) $\dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} - \dfrac{2\text{sen}x}{\cos x} + 1 = 0$

g) $3\text{sen}x = 2 - 2\text{sen}^2 x$ h) $\dfrac{3}{\cos x} - 2 = \cos x$ i) $2\text{sen}x - \sqrt{3}\tan x = 0$

**Act-121)** Desde un avión se observan dos barcos con ángulos de depresión de 35° y 48° respectivamente. Si la distancia del primer barco al avión es de 420 m, ¿a qué altura vuela el avión?, ¿cuál es la distancia entre los barcos? (figura 1.71).

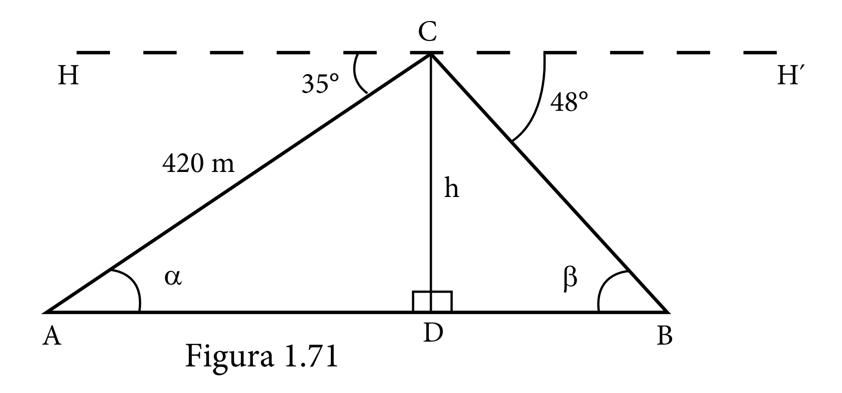


Figura 1.71

**Act-122)** Los lados iguales de un triángulo isósceles tienen cada uno 40.8 cm de largo y lo ángulos en la base tienen una amplitud de 25°. Calcula la amplitud del ángulo principal, la longitud del lado desigual y el área del triángulo.

**Act-123)** El movimiento de un muelle a partir de una distancia $x_0$ de su posición de equilibrio, por el efecto de una velocidad inicial $v_0$ se describe por la función $x = \frac{v_0}{\omega} sen(\omega t) + x_0 \cos(\omega t)$ en la que $x$ es la distancia a la posición de equilibrio, t el tiempo y $\omega$ una constante que depende del muelle y el peso colgado. Escribe la función que corresponde a un muelle de constante $\omega=2$, que parte de una posición 2 cm debajo de la posición de equilibrio con una velocidad de 3 cm/s hacia arriba y encuentre el tiempo que demora en hallarse 2 cm arriba de la posición de equilibrio.

**Act-124)** La velocidad $v$ de la sangre al pasar por una válvula del corazón de cierto roedor viene dada por la siguiente ecuación: $v = -4\cos(6\pi t)+4$, donde la velocidad $v$ se mide en cm/s y el tiempo $t$ en segundos.

a) Esboza la gráfica de la función.
b) Halla el periodo.
c) ¿Cuál es la velocidad máxima y mínima de la sangre en la válvula?

## *1.5. Variación, limites y continuidad de funciones*

Al analizar el comportamiento de las funciones para valores muy grandes, en valor absoluto, de la variable y en la proximidad de un polo hemos utilizado expresiones tales como "se acerca a…", "tiende a…", "en la proximidad de…" y lo hemos simbolizado en la forma:

$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} L^+, f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} L^-$ que leemos: cuando $x$ tiende a $+\infty$, $f(x)$ tiende a $L$ por valores mayores, en el primer caso, o menores, en el segundo caso.

$f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} L^+, f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} L^-$ que leemos: cuando $x$ tiende a $-\infty$, $f(x)$ tiende a $L$ por valores mayores, en el primer caso, o menores, en el segundo caso.

También hemos utilizado:

$f(x) \xrightarrow[x \to x_0^-]{} +\infty, f(x) \xrightarrow[x \to x_0^+]{} +\infty$ que leemos: cuando $x$ tiende a $x_0$, $f(x)$ tiende a $+\infty$ por valores menores, en el primer caso, o mayores, en el segundo caso.

$f(x) \xrightarrow[x \to x_0^-]{} -\infty, f(x) \xrightarrow[x \to x_0^+]{} -\infty$ que leemos: cuando $x$ tiende a $x_0$, $f(x)$ tiende a $-\infty$ por valores menores, en el primer caso, o mayores, en el segundo caso.

Este lenguaje hace referencia a una propiedad de las funciones que estudiaremos en lo que sigue: **el límite de funciones.** Esta propiedad nos permite estudiar el comportamiento de las funciones para valores grandes de la variable o en las cercanías de un punto, y también para determinar asíntotas.

### *Límites infinitos y en el infinito*

**Ejemplo 70: Determina las asíntotas de la función** $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ .

**Resolución:** Sabemos que esta es una función racional cuyo dominio es $\Re - \{-1\}$ pues tiene un único polo en $-1$, en el infinito se acerca a cero pues el grado del denominador es mayor que el del numerador (figura 1.72).

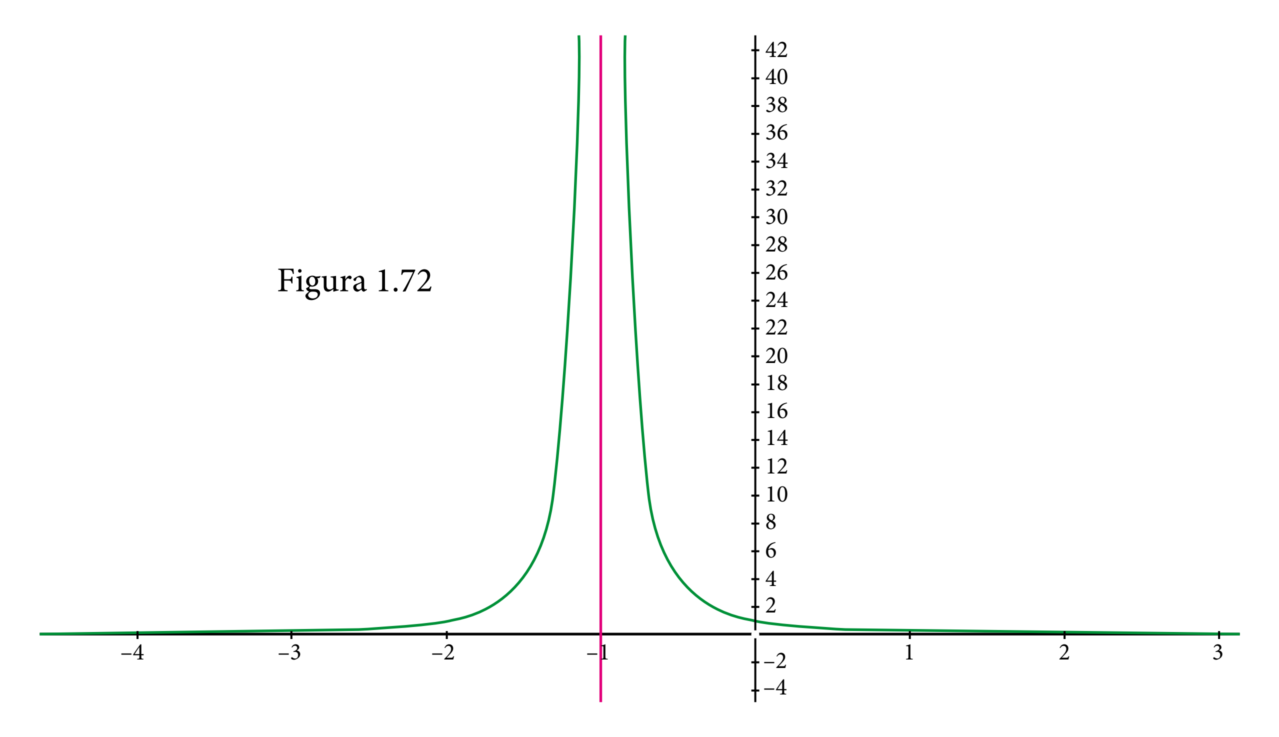



Figura 1.72

Luego esta función tiene una asíntota horizontal, el eje "X" y una asíntota vertical, la recta $x = -1$.

Ahora profundizaremos en el comportamiento de la función en la proximidad de las asíntotas con el fin de desarrollar las herramientas a las que hemos hecho referencia.

Con respecto a la ***asíntota horizontal,*** sabemos que es el eje "X", es decir, la recta $y = 0$ y este hecho lo expresamos diciendo que cuando "$x$" se hace arbitrariamente grande (positiva o negativa), $f(x)$ se aproxima a cero, en valor absoluto, tanto como queramos, en símbolos:

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \quad \text{y} \quad f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$$

Formalmente se establece lo que aparece en el cuadro siguiente.

**Se dice que una función $f(x)$ tiene límite $L$ en $+\infty$ si cuando $x$ se hace arbitrariamente grande ($x \to \infty$),** $f(x)$ se aproxima a $L$, en valor absoluto, tanto como queramos ($|f(x)-L| \to 0$). **Simbólicamente se escribe:** $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

**Se dice que una función $f(x)$ tiene límite $L$ en $-\infty$ si cuando $x$ se hace arbitrariamente pequeña ($x \to -\infty$),** $f(x)$ se aproxima a $L$, en valor absoluto, tanto como queramos ($|f(x)-L| \to 0$). **Simbólicamente se escribe:** $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$.

No todas las funciones tienen límite en el infinito, ya sabemos que la función "seno" no se acerca a ningún valor finito ni infinito cuando la variable se hace infinita, los valores de esta función oscilan entre $+1$ y $-1$. **En este caso la función es oscilante, no tiene límite en el infinito.**

El ejemplo de funciones tan simples como $f(x)=x$ muestra que las funciones pueden hacerse infinitas al acercarse a infinito la variable. En estos casos hablamos, como lo hemos hecho ya intuitivamente, de que **tienen límite infinito en el infinito** (ambos pueden ser positivos o negativos).

En el caso de la ***asíntota vertical*** son los valores de la función los que se hacen arbitrariamente grandes y los valores de la variable los escogemos en la proximidad de un punto en el que la función no está definida.

En este caso el comportamiento es el mismo si nos acercamos por la derecha o por la izquierda; en ambos casos los valores se hacen grandes de signo, esta idea que surge del gráfico la reafirmamos con las tablas 1 y 2 en las que hemos calculado algunos valores próximos a -1.

Acercándonos por la derecha (Tabla 1): **Tabla 1**

| $x$ | -0.9 | -0.99 | -0.999 | -0.9999 | -0.99999 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 100 | 10000 | 1000000 | 100000000 | 10000000000 |

Acercándonos por la izquierda (Tabla 2): **Tabla 2**

| $x$ | -1.1 | -1.01 | -1.001 | -1.0001 | -1.00001 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 100 | 10000 | 1000000 | 100000000 | 10000000000 |

Como se observa de las tablas, en este caso podemos hacer los valores de la función arbitrariamente grandes escogiendo la variable en un intervalo suficientemente pequeño alrededor del polo.

Formalizando las ideas anteriores:

**Se dice que la función $f(x)$ tiene límite $+\infty$ en el punto $x_0$ si para cualquier número $k>0$ se puede siempre aproximar $x$ a $x_0$ ($x \to x_0$) tal que se cumple que $f(x)>k$. Simbólicamente se escribe: $\lim_{x \to x_0} f(x)=+\infty$ .**

**Se dice que la función $f(x)$ tiene límite $-\infty$ en el punto $x_0$ si para cualquier número $k<0$ se puede siempre aproximar $x$ a $x_0$ ($x \to x_0$) tal que se cumple que $f(x)<k$. Simbólicamente se escribe: $\lim_{x \to x_0} f(x)=-\infty$ .**

**Resumiendo:** una ***asíntota vertical*** de una función $y=f(x)$ es una recta vertical $x=k$ tal que se cumple: $\lim_{x \to k^+} f(x)=\pm\infty$ , o bien, $\lim_{x \to k^-} f(x)=\pm\infty$.

Las posibles asíntotas verticales de una función se encuentran entre los puntos que no están en el dominio de la función, aquellos que anulan el dominador en el caso de las funciones racionales. Para determinar si un punto constituye una asíntota vertical de la función, se tiene que cumplir que alguno de los límites laterales de la función en el punto sea $\pm\infty$. En tal caso, se dirá que la función posee una asíntota vertical en dicho punto por el lado en el cual dicho límite sea $\pm\infty$.

Las ***asíntotas horizontales***, si existen, indican el valor al que se acerca la función cuando la variable independiente $x$ se hace muy grande o muy pequeña. Dicho en forma de límites, una función tiene una asíntota horizontal en $y=k$ cuando para alguno de los dos límites: $\lim_{x \to -\infty} f(x)=k$, o bien, $\lim_{x \to +\infty} f(x)=k$.

**Ejemplo 71:** Analiza el comportamiento en el infinito de la función $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2+1}$.

**Resolución.** En un procesador obtenemos la gráfica de la función que representamos en la figura 1.73; esta figura muestra que para valores muy grandes, en valor absoluto, de la variable los valores de la función se aproximan a 1. De esta observación inferimos $\lim_{x \to -\infty} f(x)=1$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x)=1$. Por lo cual la recta $y=1$ es una asíntota horizontal de la función.

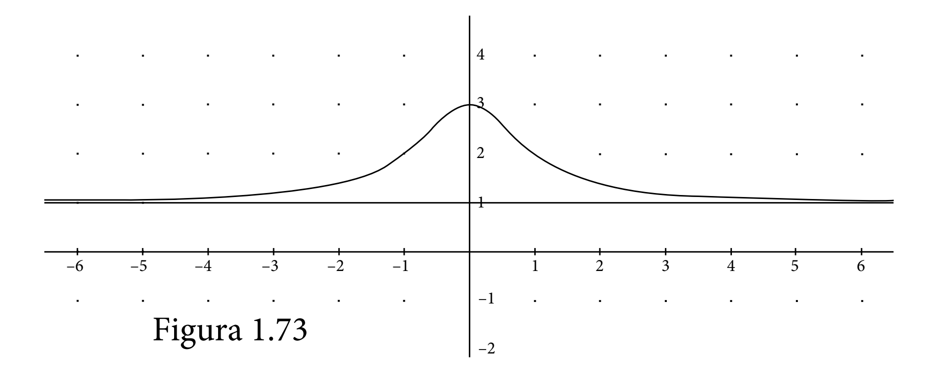


Figura 1.73

Para comprobar esta inferencia realizamos la división $\frac{x^2+3}{x^2+1}=1+\frac{2}{x^2+1}$ que nos permite apreciar que en el infinito la función se comporta como la función constante $y=1$. O simbólicamente: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+3}{x^2+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{2}{x^2+1}\right)=\left(1+\frac{2}{\infty}\right)=1$

**Ejemplo 72:** Analiza el comportamiento de $f(x)=\frac{x^2+x}{x-1}$ en el infinito y en los polos.

**Resolución:** En un procesador obtenemos la gráfica que muestra la figura 1.74 . Esta gráfica sugiere que en el infinito esta función se comporta como una recta, se hace infinita positiva en $+\infty$ y se hace infinita negativa en $-\infty$. De la ecuación y la gráfica obtenemos que la función tiene un único polo en $x=1$.

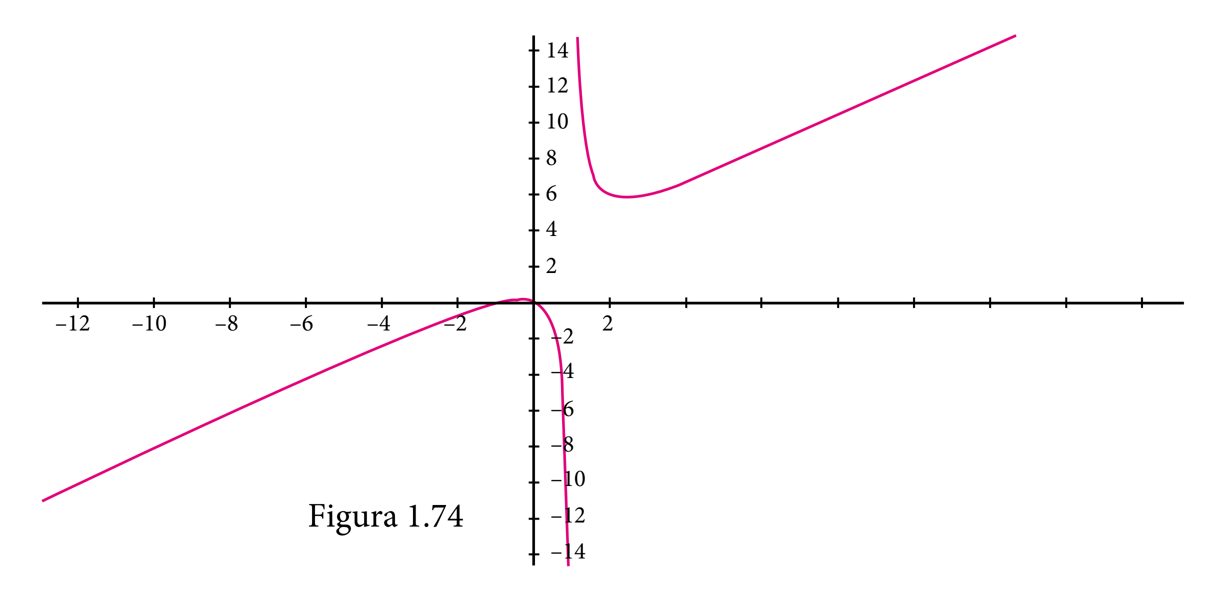


Figura 1.74

Los límites en el infinito se pueden determinar y comprobar utilizando recursos y procesos matemáticos que no son objetivo de este curso, así que para analizar los límites en el infinito, utilizamos lo que conocemos de las funciones racionales, efectuamos la división y analizamos el resultado: $\frac{x^2+x}{x-1}=x+2+\frac{2}{x-1}$ .

Esto muestra que en el infinito (de cualquier signo) la función se comporta como la función lineal $x+2$ puesto que $\frac{2}{x-1}$ se acerca a cero como ya sabemos, lo que nos permite escribir: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ y $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

En el caso del polo la gráfica sugiere que cuando nos acercamos al polo por valores mayores (a la derecha) la función tiende a $+\infty$ y cuando lo hacemos por valores menores (por la izquierda) la función tiende a $-\infty$. Cuando hablamos de limites al acercarnos por un lado, nos referimos a límites unilaterales.

Para el límite por la derecha escribimos: $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, el signo + a la derecha y arriba del uno indica que es la derecha. Esto significa que para cualquier $k > 0$ prefijado de antemano es posible encontrar un $x$ cerca y a la derecha de $1$ tal que: $f(x) > k$.

Para el límite por la izquierda escribimos: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, el signo – a la derecha y arriba del uno indica que es la izquierda. Esto significa que para cualquier $k < 0$ prefijado de antemano es posible encontrar un $x$ cerca y a la izquierda de 1 tal que: $f(x) < k$.

Formalizando estos resultados:

**Se dice que la función $f(x)$ tiene límite $+\infty$ en el punto $x_0$ a la derecha (o a la izquierda) si para cualquier número $k > 0$ se puede encontrar siempre un $x$ a la derecha pero cerca de $x_0$ tal que se cumple $f(x) > k$. Simbólicamente se escribe:**

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty \quad \left(\text{o, } \lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty\right).$$

**Se dice que la función $f(x)$ tiene límite $-\infty$ en el punto $x_0$ a la derecha (o a la izquierda) si para cualquier número $k > 0$ se puede encontrar siempre un $x$ a la derecha pero cerca de $x_0$ tal que se cumple $f(x) < k$. Simbólicamente se escribe:**

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty \quad \left(\text{o, } \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty\right).$$

***ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE:***

**Act-125)** Analiza las siguientes funciones. En particular determina sus polos y asíntotas y calcula los límites laterales al aproximarse a los polos.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$ b) $f(x) = \dfrac{x+3}{2x-5}$ c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

d) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-2}$ e) $f(x) = \dfrac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^8 - 1}$ f) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$

g) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - x - 2}{x^2 - 2x + 1}$

**Act-126)** Analiza las siguientes funciones, en particular, explícita su comportamiento en el infinito y sus asíntotas horizontales mediante el cálculo de los límites necesarios.

a) $y = \sqrt{x-1}$ b) $y = \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}$ c) $y = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{2x^2 - 8}$

d) $y = \sqrt{x^2 + 4} - 3$ e) $y = x^3 - x^2$ f) $y = \dfrac{x^3 + x^2 - 2x}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$

g) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$

**Act-127)** Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^2+4}$ b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x^2+4}$ c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-1}{x^2-1}$

d) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+x^2-9x-9}{x^2+x-6}$ e) $\lim_{x\to+\infty}\left((2x-4)-\sqrt{x+4}\right)$ f) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x+1}-\frac{x^2+x+3}{x-1}\right)$

g) $\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}\right]$

***Límite de una función en un punto***

Hasta ahora hemos introducido la idea de límite como la tendencia de los valores de la función al acercarnos al infinito o a un punto en el que la función no está definida y al acercarse a él, sus valores se acercan a infinito. De manera análoga se puede precisar intuitivamente la idea de límite para un punto cualquiera y aunque el límite no sea infinito.

Considérese la función definida por: $y = \frac{2x^2-x-1}{x-1}$ ; $x \neq 1$. El único punto real en el cual $y=f(x)$ no está definida es en $x=1$; pero, en puntos tan cercanos a 1 como se desee, la función se encuentra definida. Esta situación da lugar a la siguiente pregunta: ¿Se aproxima $y=f(x)$ a algún valor específico, cuando $x$ se aproxima a 1?

Para responder esta pregunta elaboramos las tablas siguientes donde se observa el comportamiento de los valores de $y=f(x)$, cuando $x$ se aproxima a 1 por la izquierda (valores menores que 1) o por la derecha (valores mayores que 1).

| $x\ (x\to 1^-)$ | $y=f(x)$ | | $x\ (x\to 1^+)$ | $y=f(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.5 | 2 | | 1.5 | 4 |
| 0.75 | 2.5 | | 1.25 | 3.5 |
| 0.9 | 2.8 | | 1.1 | 3.2 |
| 0.95 | 2.9 | | 1.05 | 3.1 |
| 0.99 | 2.98 | | 1.01 | 3.02 |
| 0.995 | 2.99 | | 1.005 | 3.01 |
| 0.999 | 2.998 | | 1.001 | 3.002 |
| 0.9995 | 2.999 | | 1.0005 | 3.001 |
| 0.9999 | 2.9998 | | 1.0001 | 3.0002 |
| . | . | | . | . |
| . | . | | . | . |
| . | . | | . | . |
| 1.000 | No Definido | | 1.000 | No Definido |

La observación y el análisis de ambas tablas sugieren una respuesta a la pregunta formulada antes.

Nótese que a medida que los valores de $x$, se "acercan" a 1, sin tomar el valor de 1, los valores de $y = f(x)$ se "acercan" a 3. De manera intuitiva esto se expresa diciendo que: el **límite de la función** $y = f(x)$, **cuando** $x$ **tiende a 1, es igual a 3.**

La afirmación anterior se expresa simbólicamente por cualquiera de las formas equivalentes: $f(x) \xrightarrow[x \to 1]{} 3 \quad \leftrightarrow \quad \lim_{x \to 1} f(x) = 3$ (Que se leen: $f(x)$ tiende a 3 cuando $x$ tiende a 1 o el límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a 1 es igual a 3). Este ejemplo ilustra que el límite puede existir en un punto aunque la función no esté definida en el punto.

De una manera más general, pero conservando el significado intuitivo de la palabra "límite", se dice que:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, si se puede hacer que $y = f(x)$ esté tan "cerca" de $L$ como se quiera, o sea $\left(|f(x) - L| \to 0\right)$, haciendo que $x$ esté suficientemente "cerca" de $x_0$ tanto por la derecha $\left(x \to x_0^+\right)$ como por la izquierda $\left(x \to x_0^-\right)$, pero siendo distinta de $x_0$ $(x \neq x_0)$.

En el caso de los límites infinitos ya aprendimos que la gráfica de la función permite inferir lo que ocurre, cual es el comportamiento de la función y cuál es el límite. También en el caso del límite que acabamos de introducir, el gráfico de la función permite inferir lo que ocurre.

En la figura 1.75 el gráfico de la función $y = x+1$ permite inferir que cuando los valores de la variable se acercan a 1, los valores de la función se acercan a 2. Esta inferencia queda reforzada por el hecho de que si escogemos una franja de amplitud pequeña alrededor del valor 2 en el eje "Y", la gráfica de la función permite proyectar un intervalo tal que todas sus imágenes están en la franja seleccionada.

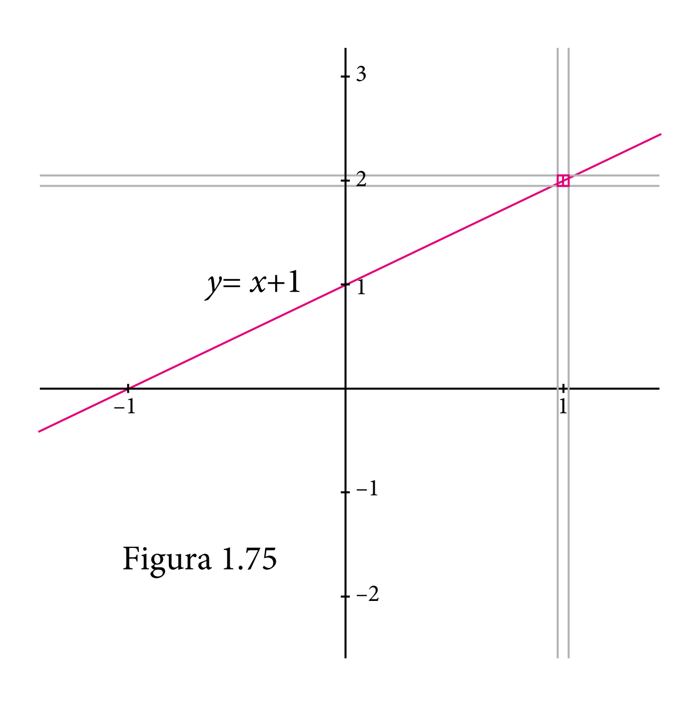


Figura 1.75

Hay que notar que al hacer referencia al límite lo hemos hecho en singular, esto se justifica porque:

**El límite de una función en un punto cuando existe es único.**

Lo anterior se expresa también de la siguiente manera:

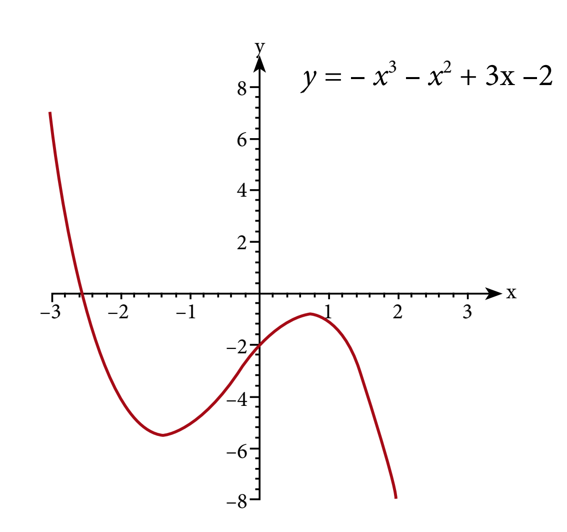
Si: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_l$ y $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_2 \Rightarrow L_l = L_2$

Como ya dijimos pues, en muchos de los casos el límite de una función en un punto también puede ser determinado a partir de su gráfica, claro siempre y cuando esté elaborada con la exactitud y claridad requerida. Por ejemplo en la siguiente gráfica de la función polinomial $y = f(x) = -x^3 - x^2 + 3x - 2$, se observa que:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -2$$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = -5$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = -8$$




Es importante notar que en este caso:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

para toda $x_0$ de su dominio. Además, este tipo de funciones que tienen esta propiedad local de que $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)}$ se llaman funciones continuas en $x_0$.

El límite de una función en un punto de su dominio no siempre existe tal como lo muestra la siguiente gráfica (Figura 1.76) de una función $y = f(x)$ . En ella se visualiza que aunque tiene límite en un número infinito de puntos de su dominio, sin embargo, en $x=a$ no lo tiene ya que $y_1 \neq y_2$ c***uando debieran ser iguales para la existencia del límite.*** Sin embargo hay que notar que si tiene ***límites laterales*** en $x=a$. En este caso se dice que la ***función es discontinua*** en $x=a$.

$$\lim_{x\to 9} f(x) = 10$$

$$\lim_{x\to -2} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = y_1$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = y_2$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad ; \; a \neq x_0 \in Dom\, f$$

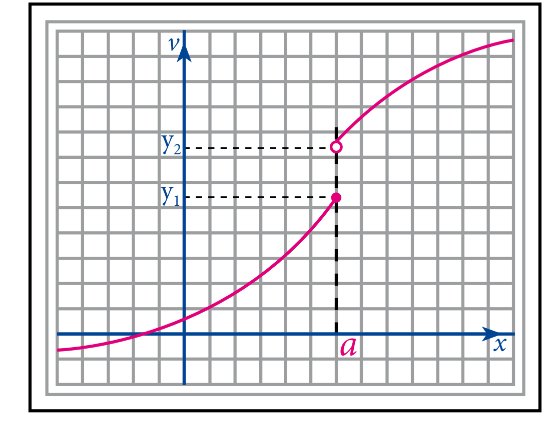



Figura 1.76

En la práctica del cálculo de límites en un punto se pueden aplicar las siguientes operaciones y propiedades del límite que facilitan su determinación.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones numéricas tales que $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$ entonces se cumple que:

$$\lim_{x\to x_0} (f \pm g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = a \pm b$$

$$\lim_{x\to x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = a \cdot b$$

$$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{a}{b} \text{ si b} \neq 0$$

$$\lim_{x\to x_0} \left(f(x)\right)^{\frac{m}{n}} = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)^{\frac{m}{n}}\right) = a^{\frac{m}{n}} \text{ si a} > 0$$

Además, si P$(x)$ y Q$(x)$ son polinomios entonces: $\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$.

En particular: $\lim_{x\to x_0} c = c$ , $\lim_{x\to x_0} x = x_0$ y $\lim_{x\to x_0}(mx + b) = mx_0 + b$.

Y si $Q(x_0) \neq 0$ entonces: $\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$

Y si $P(x_0) \geq 0$ entonces $\lim_{x\to x_0} \left(P(x)\right)^{\frac{m}{n}} = \left(P(x_0)\right)^{\frac{m}{n}}$

Es decir, para calcular el límite de funciones racionales y potenciales de exponente racional basta evaluarlas en el punto si están definidas en él.

Cuando don funciones $f$ y g, coinciden en un intervalo, excepto un punto $x_0$ del mismo, sus límites en ese punto son iguales:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$$

**Ejemplo 73:** Calcula los siguientes límites

a) $\lim_{x\to 2} (x^2 - 3x + 5)$

b) $\lim_{x\to 0} = \frac{2 + x}{x^2 + 1}$

c) $\lim_{x\to 1} \sqrt{x + 2}$

d) $\lim_{x\to 1} = \frac{x^4 - x^3}{x - 1}$

e) $\lim_{x\to 2} = \frac{\sqrt{x - 1} - 1}{x - 2}$

**Resolución:**

a) La función dada es una función polinomial y podemos calcular el límite aplicando las propiedades de las operaciones con límites y del límite de la función identidad y de las funciones constantes:

$$\lim_{x\to 2}(x^2 - 3x + 5) = \lim_{x\to 2} x^2 - \lim_{x\to 2}(3x) + \lim_{x\to 2} 5 = \left(\lim_{x\to 2} x\right)^2 - \lim_{x\to 2} 3 \cdot \lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 5 = 2^2 - 3 \cdot 2 + 5 = 3$$

b) En este caso además de las operaciones de suma y producto tenemos una división, para aplicar la propiedad hay que comprobar que el límite del denominador es diferente de cero: $\lim_{x\to 0}\left(x^2+1\right)=0^2+1=1\neq 0$ . Ahora podemos aplicar la propiedad:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2+x}{x^2+1} = \frac{\lim_{x\to 0}(2+x)}{\lim_{x\to 0}(x^2+1)} = \frac{2+0}{1} = 2$$

En la práctica la comprobación de que el límite del denominador es diferente de cero no se realiza aparte sino como parte del cálculo posterior.

c) $\lim_{x\to 1}\sqrt{x+2} = \sqrt{\lim_{x\to 1}(x+2)} = \sqrt{3}$ Es fácil ver que el cálculo es válido porque el límite de la cantidad subradical es positivo.

d) $\lim_{x\to 1}\frac{x^4 - x^3}{x-1} = \frac{\lim(x^4 - x^3)}{\lim_{x\to 1}(x-1)} = \frac{0}{0}$ en este caso no se puede aplicar la propiedad porque el límite del denominador es diferente de cero, si el numerador fuera diferente de cero se trataría de un polo y aplicaríamos los resultados del epígrafe anterior pero en este caso el numerador también tiene límite cero.

Estamos en presencia de una indeterminación que no puede resolverse aplicando las propiedades directamente, podemos entonces tratar de simplificar a ver si se elimina la indeterminación: $\frac{x^4 - x^3}{x-1} = \frac{x^3\,(\mathrm{x}-1)}{x-1}$ cuando $x\neq 1$ esta fracción es igual a $x^3$, como el límite no depende de lo que pasa en el punto podemos escribir:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4 - x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^3\,(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x^3 = 1$$

e) En este caso también no se pueden aplicar las propiedades directamente pues tanto el numerador como el denominador tienen límite cero. Tratamos de transformar la expresión y para ello multiplicamos numerador y denominador por la conjugada del denominador:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = \lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{x-1}+1}{\left(\sqrt{x-1}+1\right)}\right) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}\right) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{\left(\sqrt{x-1}+1\right)}\right)$$

Expresión en la que pueden aplicarse las propiedades y resulta:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{\left(\sqrt{x-1}+1\right)}\right)=\frac{1}{\sqrt{2-1}+1}=\frac{1}{2}$$

**Ejemplo 74:** Determinar la ecuación de recta tangente a la curva $f(x)=x^2-3x+5$ en el punto $(2\ ,\ y)$ de su gráfica.

**Resolución:** Cuando en páginas anteriores se hizo una breve introducción a los problemas fundamentales que resuelve el Cálculo Diferencial se planteo el siguiente límite especial (que define la derivada de la función ):

$$m_t=\lim_{\Delta x\to 0} m_s=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

El cual sirve para determinar la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto $(x,y)$ de su gráfica. De donde la pendiente de la tangente a la curva será:

$$m_t=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[(x+\Delta x)^2-3(x+\Delta x)+5-(x^2-3x+5\right]}{\Delta x}$$

Observa que este límite no se puede calcular directamente porque queda una división entre cero, razón por la cual primero se simplificara la expresión en la idea de quitar la indeterminación y después poder calcularlo.

$$m_t=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-3x-3\Delta x+5-x^2+3x-5}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2-3\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x-3)=(2x+0-3)=2x-3$$

Por tanto la pendiente de la recta tangente (y de la curva) en $(2,y)$ es:

$$m_t(x)=2x-3 \Rightarrow m_t(2)=2(2)-3=1$$

Y como $y=f(2)=(2)^2-3(2)+5=3$ , entonces la ecuación de la recta tangente a la curva en $(2,3)$ será: $y-y_1=m_t(x-x_1) \Rightarrow y-(3)=(1)(x-2) \Rightarrow$ $\boxed{x-y+1=0}$

***ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE:***

**Act-128)** Desde una plataforma situada a 20 metros de altura se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad de 60 m/seg. En estas condiciones el modelo matemático que describe el movimiento de la pelota es $h(t)=-4.9t^2+60t+20$, donde, h es la altura, en metros, que alcanza la pelota en un tiempo t dado en segundos. Aplicando el concepto de límite $\left[\dot{v}=\lim_{\Delta x\to 0}\bar{v}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}\right]$, calcula la velocidad instantánea de la pelota a los 3 segundos y la altura máxima alcanzada.

**Act-129)** Dadas las funciones

$f(x) = c$ , $g(x) = x$ , $y = mx + b$ , $h(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ , $w(x) = \sqrt{x}$ .

Verifica mediante aproximaciones numéricas o gráficamente los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 5$ b) $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = x_0$ c) $\lim\limits_{x \to 0} (mx + b) = mx_0 + b$

d) $\lim\limits_{x \to 1} h(x) = 2$ e) $\lim\limits_{x \to 5} w(x) = \sqrt{5}$

**Act-130)** Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to -4} (x^4 + x^3 - x + 1)$ b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x + 4}{x^4 + 2x^2 + 1}$ c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$

d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^9 + x^3 + x}{x^6 + x^2 + 1}$ e) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{x^2 + 4x + 4}$ f) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 + 5x - 50}{x^2 - 25}$

g) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^5 - 1}{x^2 + x + 1}$ h) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - x - 1}$ i) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6}{x^2 - 5x + 6}$

j) $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x + |x|}{2}$ k) $\lim\limits_{x \to -1} \sqrt{x^3 + 10}$ l) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x - 3}}{\sqrt{x + 1}}$

m) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$ n) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ ñ) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 4} - 2}{x}$

o) $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{\sqrt{x} + 14}$ p) $\lim\limits_{x \to 10} \dfrac{x^3 - 1000}{x^3 - 20x^2 + 100x}$ q) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^5 - \sqrt{8}}{x^2 + \sqrt{2}}$

r) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 1}$ s) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x^2 + x - 1}}{\sqrt{x + 4} - 3}$ t) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[5]{(x + 1)^3} - 1}{x}$

**Act-131)** Grafica la función definida a trozos $f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x < -1 \\ x^2 & si \quad -1 \leq x < 1 \\ 2 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$

y calcula los siguientes límites: a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ d) $\lim\limits_{x \to 10} f(x)$.

**Act-132)** Dadas las funciones

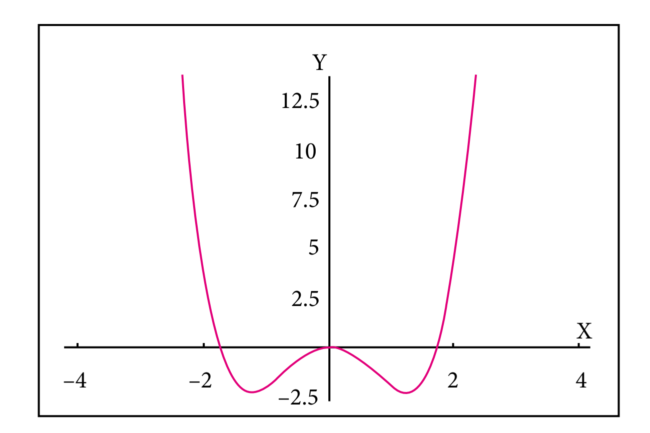
$$f(x) = c \ , \ f(x) = x \ , \ f(x) = mx + b \ , \ f(x) = ax^2 + bx + c \ , \ f(x) = \sqrt{x} \, .$$

Determina el siguiente límite para todas y cada una de ellas:

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

***Continuidad y discontinuidad de funciones***

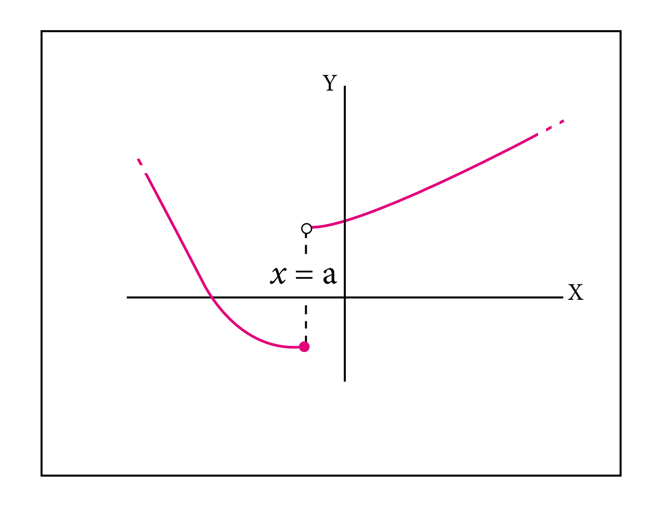
También, de acuerdo a su variabilidad, las funciones pueden ser clasificadas en continuas y discontinuas. Para que nos hagamos una idea, una función continua en todo su dominio sería aquella que se puede dibujar de un sólo trazo sin levantar el lápiz del papel. Por ejemplo la dibujada a la derecha.




Pero muchas de las funciones van a presentar discontinuidades, o sea, van a ser continua sólo en algunos "trozos" de su dominio y en los límites de éstos presentarán discontinuidades como suele suceder en los polos de algunas funciones racionales. Veamos a continuación algunos tipos de discontinuidades que pueden presentarse:

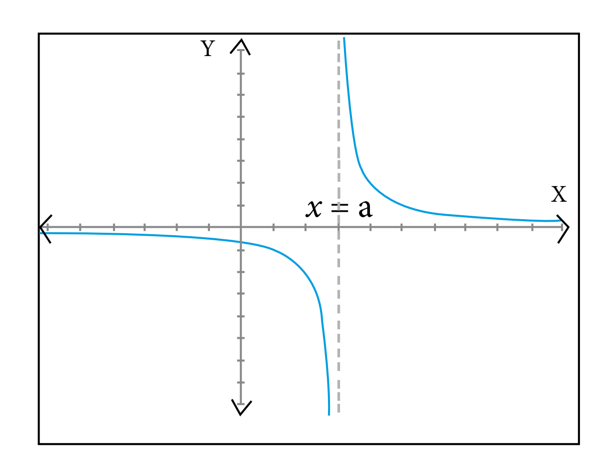
**Discontinuidad de salto finito:**

Se presenta cuando en un valor $x = a$, se observa en la gráfica una separación o **salto** entre dos trozos de la función que pueda medirse. Esto es debido a que la tendencia de la función a la izquierda del punto $x = a$ es diferente de la que tiene a la derecha.



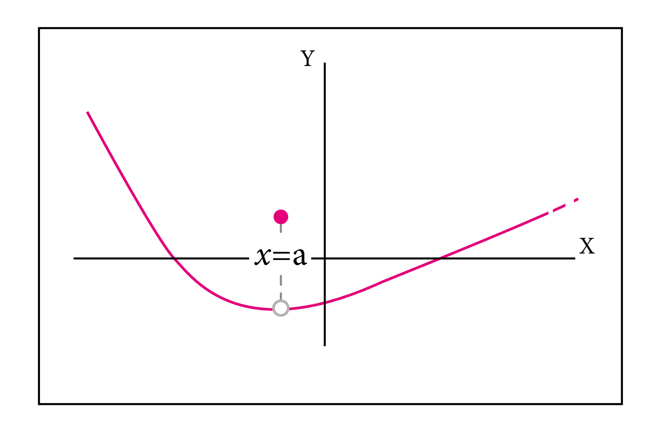
**Discontinuidad de salto infinito:**

Cuando en un punto de la curva observamos que la tendencia a la izquierda o a la derecha (o ambas) es a alejarse al infinito (más infinito o menos infinito), entonces nos encontramos con una discontinuidad de salto infinito en el punto de $x$=a.



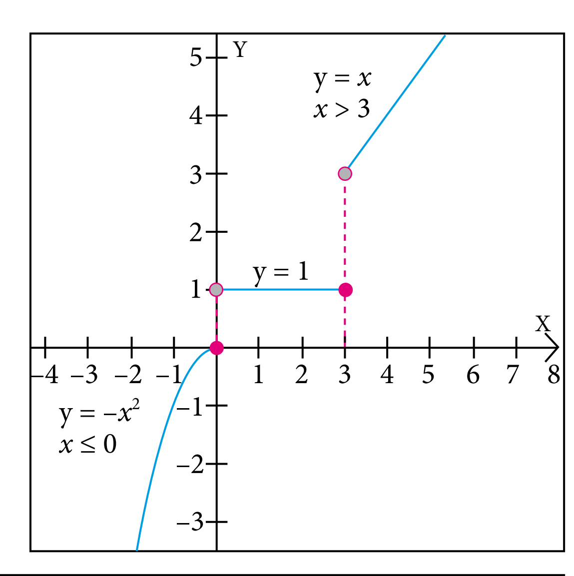

**Discontinuidad evitable:**

Se presenta cuando la gráfica se interrumpe en un punto donde no hay imagen, o la imagen está desplazada del resto de la gráfica. Aquí la tendencia de la función a la izquierda y a la derecha de $x$=a sí coincide, sin embargo es $f$(a) el valor que no coincide con dicha tendencia o que ni siquiera existe.




Un caso interesante para estudiar la continuidad y discontinuidad de las funciones son las funcione que solo están definidas en ciertos valores del dominio, en este caso se les suele llamar ***funciones por intervalos.*** Y son funciones definidas por distintos criterios, según los intervalos que se consideren y suelen ser discontinuas. Algunos ejemplos son:

**Ejemplo 75:** $f(x) = \begin{cases} x & si \quad x > 3 \\ 1 & si \quad 0 < x \leq 3 \\ -x^2 & si \quad x \leq 0 \end{cases}$




Nótese que $f$ no representa tres funciones sino más bien, a una función cuyo dominio es el conjunto de números reales (Ver gráfica de la derecha). Sin embargo, la gráfica de $f$ consta de tres secciones obtenidas trazando, a su vez:

$y = -x^2$ en el intervalo $x \leq 0$

$y = 1$ en el intervalo $0 < x \leq 3$ y

$y = x$ en el intervalo $x > 3$.

Esta función ***es continua*** en los intervalos $-\infty \leq x < 0$ , $0 < x < 3$ y $3 < x \leq \infty$, y ***es discontinua*** en los puntos (0,0) y (3,1). Nótese además, que en (0,0) y (3,1) la función no tiene límite, aunque si tiene límites laterales diferentes en dichos puntos.

De los ejemplos anteriores de ***funciones continuas*** se puede observar que para ellas cada valor de $y=f(x)$ puede ser aproximado por los valores cercanos, ya que en cada punto la función tiende al valor en el punto. Esto significa que las funciones continuas están definidas en sus puntos de continuidad, además, tienen límite y su límite coincide con el valor de la función en dichos puntos.

Estas observaciones permiten caracterizar analíticamente a las funciones continuas como se indica en el cuadro siguiente.

**Una función $f$ es continua en un punto $x_0$ cuando sí y sólo si cumple las siguientes tres condiciones:**

i) $x_0 \in \mathbf{Dom} f$ **o sea** $f(x_0)$ **existe.**

ii) $\lim_{x \to x_0} f(x)$ **existe**

iii) $\lim_{x \to x_0} = f(x_0)$

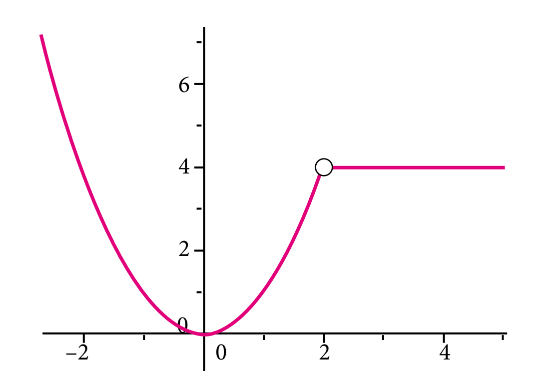
**Una función es continua en un intervalo si es continua en cada punto del intervalo.**

**Resumiendo:** las funciones que no son continuas se llaman discontinuas. Hay varios tipos de discontinuidad dependiendo de la condición que no se cumple.

a) Discontinuidad removible o evitable: Corresponde al caso en que la función tiene límite pero no coincide con el valor $f$(c). Se llama evitable porque basta definir $f$(c) como el límite de la función en c para que la función sea ahora continua.
b) Discontinuidad de primera especie: Puede ser de salto finito cuando existen los dos límites laterales pero son distintos, o de salto infinito cuando alguno de los límites laterales es infinito.
c) Discontinuidad esencial o de segunda especie: Si alguno de los dos límites laterales no existe.

De manera más intuitiva, las funciones discontinuas son aquellas funciones que están cortadas, y que cuando uno las dibuja, tiene que “levantar el lápiz”. Cabe notar que existen varias funciones en las cuales se tiende a pensar en un comienzo que son discontinuas, pero lo que ocurre es que el punto que se evalúa no pertenece al dominio de la función. Un ejemplo de esto es la función racional $f(x)=(x+1)/(x-4)$, comúnmente se cree que la función no es continua en $x=4$, pero en realidad el 4 no pertenece al dominio de la función.

**Ejemplo 76:** $g(x) = \begin{cases} x^2 & si \;\; x < 2 \\ 4 & si \;\; x > 2 \end{cases}$




El dominio de esta función lo forman todos los números reales menos el 2. Y es continua en todo $\Re$ excepto en $x$= 2 pues y= $g(2)$ no existe. Además tiene una discontinuidad evitable si se redefine la función de la siguiente manera:
$g(x) = x^2$ , si $x < 2$ y $g(x) = 4$ , si $x \geq 2$.

**Ejemplo 77:** $f(x) = \begin{cases} -1 & si \;\; x < 0 \\ 0 & si \;\; x = 0 \\ 1 & si \;\; x > 0 \end{cases}$

Como se observa en la gráfica de esta función (Ver Figura 1.77)

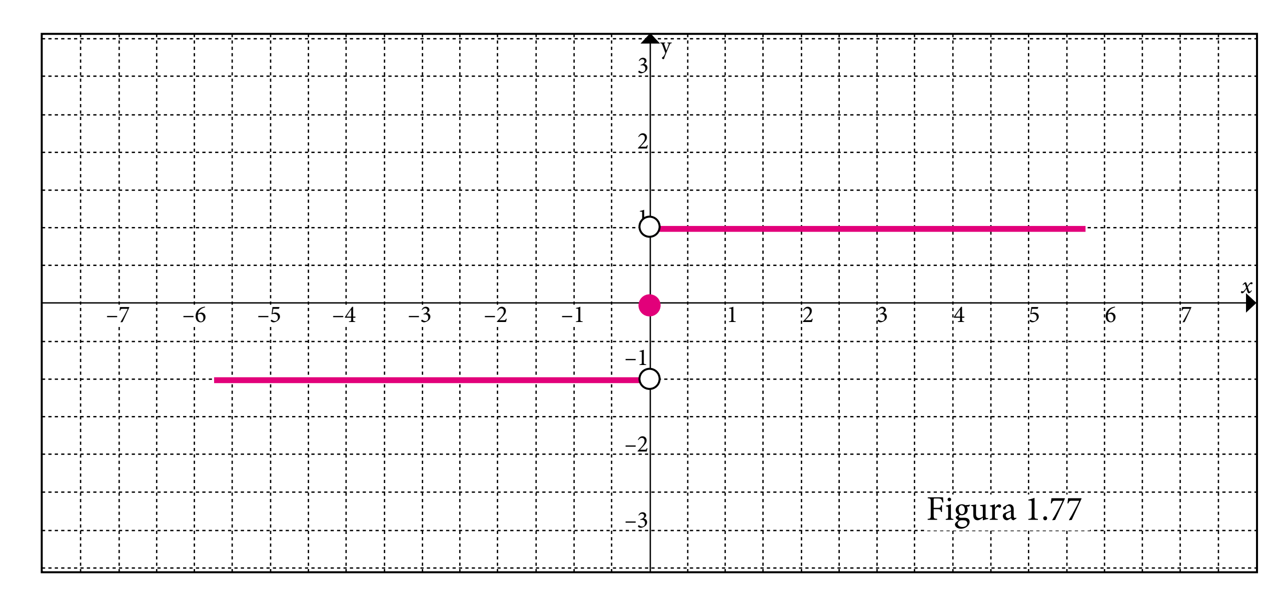


Figura 1.77

El dominio de la función es $\Re$, y es continua en $\Re - \{0\}$ y discontinua en $x$=0, ya que aunque está definida en $x$=0, sus límites laterales existen en ese punto pero son diferentes $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \neq 1 = \lim_{x \to 0^+} f(x)$, por tanto no tiene límite en dicho punto. O sea, no se cumple la condición de continuidad: $\lim f(x) = f(x)$.

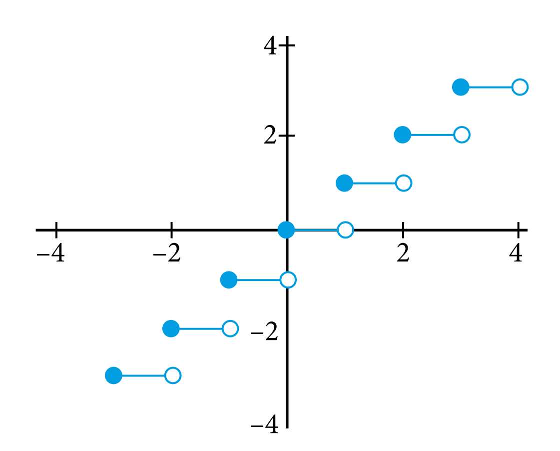
**Ejemplo 78:** $f(x) = E(x)$ es una función que a cada número real hace corresponder el número entero inmediato inferior (y se llama **Función parte entera de *x***).

| $x$ | 0 | 0.8 | 1 | 1.5 | 1.9 | 2 | 2.99 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$=E($x$) | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 |

El dominio de la función es $\Re$, y es continua en $x \in \Re - Z$ y discontinua en todos los enteros, ya que aunque está definida en $Z$, sus límites laterales existen en $Z$ pero son diferentes:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)\ ,\ \ x_0 \in Z\ .$$

Por tanto no tiene límite en ningún número entero. O sea, no se cumple la condición de continuidad: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.




**Ejemplo 79:** Analiza la continuidad de $f(x) = \dfrac{x + |x|}{2}$ en $x = 0$.

**Resolución:** analizamos la función por trozos y calculamos sus límites laterales

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+|x|}{2} = \dfrac{x-x}{2} = 0 \quad \text{si} \quad x < 0 & \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \\ \dfrac{x+|x|}{2} = \dfrac{x+x}{2} = x \quad \text{si} \quad x > 0 & \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \end{cases}$$

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$, por tanto la función es continua en $x$=0

**Ejemplo 80:** Analiza la continuidad de las funciones en el punto indicado

a) $f(x)=\dfrac{3x^2 - 5x + 1}{1 + x^2},\ x_0 = 0$ b) $g(x)= \sqrt{x^3 - 8},\ x_0 = 2$ c) $h(x)= \sqrt{x^2 - 3},\ x_0 = 1.5$

d) $v(x)=\dfrac{3x + 5}{x^2 - 16},\ x_0 = 4$ e) $l(x)=\dfrac{x^4 - x}{x^3 - x},\ x_0 = 1$ f) $w(x)= |x|,\ x_0 = 0$

**Resolución:**

a) Analizamos cada condición:

i) $0 \in Domf$

ii) $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe pues se trata de un punto del dominio de una función racional.

iii) $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$

En la práctica no tenemos que explicitar las tres condiciones, es usual calcular directamente el límite; si existe y es igual al valor de la función, como en este caso, la función es continua.

b) $\lim_{x\to 2}\sqrt{x^3-8}=\sqrt{2^3-8}=0=g(0)$ pues se trata de una función potencial y está definida en el punto. Por tanto la función es continua en $x=2$.

c) $h(1.5)$ no existe, es decir, la función no está definida porque $1.5^2-3=-0.75<0$. Luego la función no es continua.

d) $v(4)$ no existe, es decir, la función no está definida porque el denominador se anula. Luego la función no es continua.

e) $1\notin$ ***Dom l*** porque es un cero del denominador. Sin embargo, en este caso si se puede calcular el límite: $\lim_{x\to 1}\frac{x^4-x}{x^3-x}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)(x^2+x+1)}{x(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{3}{2}$.

En este caso vemos que existe el límite pero la función no es continua. Y tiene una discontinuidad evitable si se define *l (1)* = 3/2.

f) En este caso la función está definida en todo $\Re$, pero primeramente hay que definirla por partes para analizarla, y después procedemos a calcular el límite:

$$w(x)=|x|=\begin{cases} x & si \quad x>0 \quad \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x=0 \\ 0 & si \quad x=0 \quad \Rightarrow w(0)=0 \\ -x & si \quad x<0 \quad \Rightarrow \lim_{x\to 0^-}(-x)=0 \end{cases}$$

Por tanto es continua en $x_0=0$

Lo que conocemos de las operaciones con límites nos permite inferir resultados análogos para las operaciones con funciones continuas. El resultado de realizar operaciones algebraicas con funciones continuas es una función continua

**Propiedades y operaciones con funciones continuas**

**Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones numéricas continuas en un punto $x_0$, se tiene también:**

- $(f\pm g)(x)$ **es continua en $x_0$.**
- $(f\cdot g)(x)$ **es continua en $x_0$.**
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ **es continua en $x_0$ si $g(x_0)\neq 0$.**
- $(f(x))^{\frac{m}{n}}$ **es continua en $x_0$ si $f(x_0)\geq 0$.**

**También se cumple que $(f\circ g)(x)$ es continua si $f(x)$ y $g(x)$ lo son.**

Como ya estudiamos anteriormente las funciones trigonométricas no son algebraicas. Estas funciones que no son algebraicas, es decir, **que no se pueden definir mediante un número finito de operaciones algebraicas se llaman trascendentes. Las funciones trigonométricas son trascendentes.**

Para las funciones trascendentes también se puede hablar de límite y continuidad, en particular las funciones trigonométricas son continuas en todos los puntos en los que están definidas. **Para calcular el límite de una función trigonométrica en un punto en el que está definida basta evaluarla en dicho punto.**

**Ejemplo 81: Calcula a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \text{sen}(x)$ b) $\lim_{x\to\pi} \cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$ c) $\lim_{x\to 1} \tan(x^2-1)$.**

**Resolución:**

a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \text{sen}(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ porque el seno es continua en cada punto del dominio.

b) $\lim_{x\to\pi} \cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ porque el coseno está definido y es continuo en $\pi$.

c) $\lim_{x\to 1} \tan(x^2-1) = \tan(0) = 0$ porque la tangente está definida y es continua en cero.

En la Matemática juega un papel muy importante el llamado ***límite fundamental trigonométrico:***

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = ?$$

Está función no está definida en cero, por eso no se puede calcular el límite evaluando directamente; en un procesador podemos construir las tablas siguientes:

| $x$ | 1.571 | 0.785 | 0.3927 | 0.19635 | 0.09817 | 0.00307 | 0.00077 | 0.00038 | 9.6E-05 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sen($x$)/$x$ | 0.637 | 0.9 | 0.9745 | 0.99359 | 0.99839 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**Tabla 3**

| $x$ | −1.571 | −0.785 | −0.393 | −0.1982 | −0.0031 | −0.00031 | −0.0008 | −0.0002 | −1E−04 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sen($x$)/$x$ | 0.637 | 0.9 | 0.9745 | 0.99859 | 0.99839 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**Tabla 4**

Las tablas 3 y 4 permiten inferir que al aproximarnos a cero tanto por la izquierda como por la derecha, los valores de la expresión se acercan a 1. La comprobación de este resultado no la haremos en este curso introductorio, pero admitimos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(x)}{x}=1$$

**Ejemplo 82: Calcula:** a) $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(2x)}{x}$ b) $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(x^2+x)}{x}$ c) $\lim_{x\to 1}\frac{\text{sen}(x-1)}{x^2-1}$.

**Resolución:**

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(2x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\text{sen}(2x)}{2x}\right)=\lim_{x\to 0}2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(2x)}{2x}$ ,si escribimos $z=2x$, tendremos

$\lim_{x\to 0}z=\lim_{x\to 0}2x=0$ y $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(2x)}{2x}=\lim_{z\to 0}\frac{\text{sen}(z)}{z}=1$, luego, $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(2x)}{x}=(2)(1)=2.$

En la práctica omitimos la escritura de la sustitución, pero hay que tener presente que ese es el proceso real.

b) $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(x^2+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(x\cdot(x+1))}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{sen}(x\cdot(x+1))}{x\cdot(x+1)}\cdot(x+1)\right)=$

$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(x\cdot(x+1))}{x\cdot(x+1)}\cdot\lim_{x\to 0}(x+1)=1\cdot 1=1$

c) $\lim_{x\to 1}\frac{\text{sen}(x-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\text{sen}(x-1)}{(x-1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\text{sen}(x-1)}{(x-1)}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

**Ejemplo 83:** Demostrar que $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0.$

**Resolución:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos^2 x)}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}^2 x}{x(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\, x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\, x}{(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\, x}{x}\cdot\frac{\lim_{x\to 0}\text{sen}\, x}{\lim_{x\to 0}(1+\cos x)}$$

Como las funciones seno y coseno son continuas en $x=0$, entonces:

$\lim_{x\to 0}\text{sen}\, x=\text{sen}\, 0=0$ $\lim_{x\to 0}(1+\cos x)=(1+\cos 0)=(1+0)=1$

Y como $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\, x}{x}=1$, se concluye que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\, x}{x}\cdot\frac{\lim_{x\to 0}\text{sen}\, x}{\lim_{x\to 0}(1+\cos x)}=(1)\left(\frac{0}{1}\right)=0$$

**Nota:** Los limites trigonométricos $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(x)}{x}=1}$ y $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0}$ son muy importantes y se usaran posteriormente en la unidad de aprendizaje 3 como fundamento para deducir la reglas de derivación de algunas funciones trigonométricas.

**Resumen:** Las funciones polinomiales, racionales, potenciales de exponente racional y trigonométricas son continuas en todo su dominio; para estas funciones, en los puntos en los que están definidas, el límite se calcula evaluando la función en dichos puntos.

En general el límite de una función en un punto de continuidad se calcula evaluando la función en el punto.

***ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE:*** 

**Act-133)** Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \text{sen}\,(2x)$

b) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\tan(4x))$

c) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

d) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos(2x)}{\text{sen}(x)+\cos(x)}\right)$

e) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} (2\text{sen}\,(2x)-\cos(x)+\tan(x))$

f) $\lim_{x\to 1} \left(\sec\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)$

g) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos(2x)-\cos(x)}{\text{sen}(2x)+\text{sen}(x)}\right)$

h) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} (\cos^2(x)+\text{sen}(x)+1)$

i) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\tan(x)}{x}\right)$

j) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\text{sen}(5x)}{\text{sen}(3x)}\right)$

k) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\text{sen}(5x)}{x}\right)$

l) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right)$

m) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos(x)}{\text{sen}(x)}\right)$

n) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\text{sen}(a+x)-\text{sen}(a-x)}{x}\right)$

**Act-134)** Analiza la continuidad de la función periódica (de *período* 1) definida por $f(x)=x-[x]$ **(= *x menos la parte entera de x*)** cuya gráfica es la que se muestra en la figura 1.78.

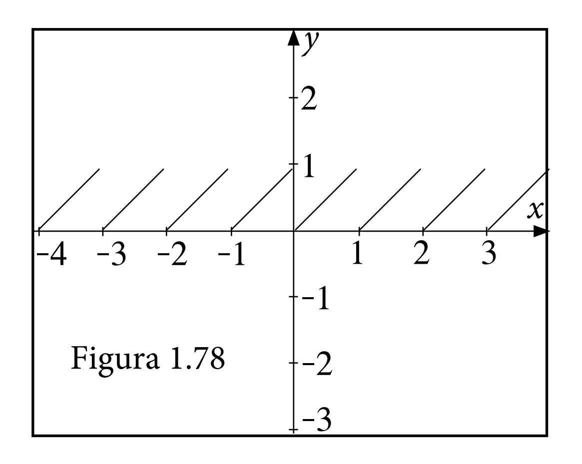


Figura 1.78

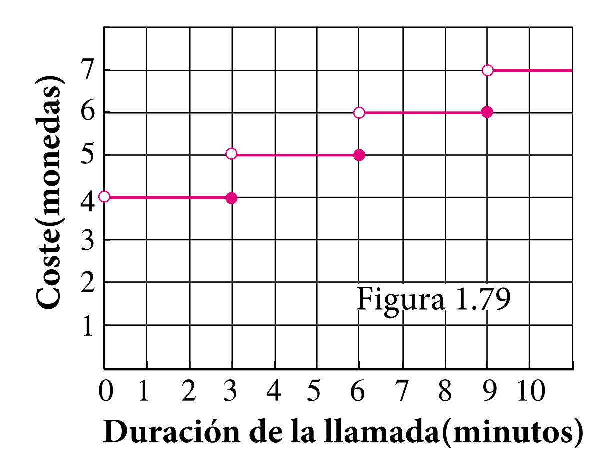


Figura 1.79

**Act-135)** Cuando haces una llamada en un teléfono público de monedas necesitas 4 monedas para hablar durante los tres primeros minutos. A partir del tercer minuto, necesitas una moneda más por cada tres minutos de conversación que quieras. La gráfica de la función que modela esta situación está representada en la figura 1.79. Realiza un análisis de ella enfatizando en su continuidad y discontinuidad.

**Act-136)** Analiza la gráfica (Figura 1.80) de la siguiente función $y=f(x)$, determinando:

a) Dominio e imagen.
b) Continuidad y discontinuidad.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Máximos y mínimos (relativos y absolutos), indicando el valor de la función en esos puntos.
e) Puntos de intercepción con los ejes

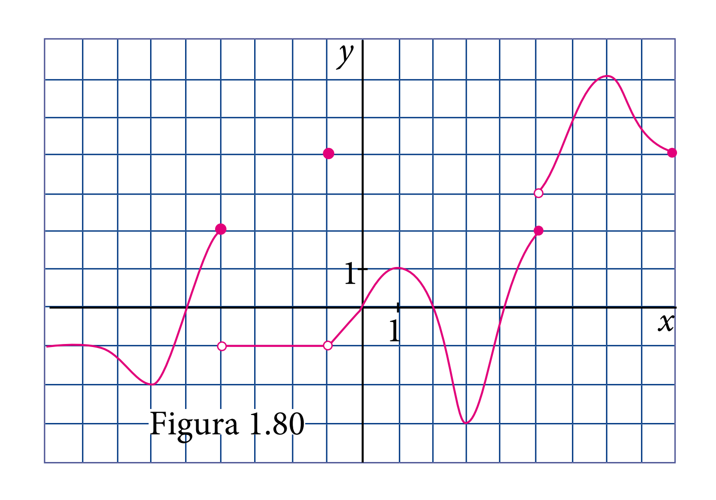


Figura 1.80

**Act-137)** Determina los puntos de continuidad y discontinuidad de las siguientes funciones en todo su dominio; donde no sean continuas averigua si es posible redefinir la función de modo que la nueva función obtenida sea continua.

a) $y=\dfrac{1}{x-5}$  b) $y=\dfrac{|x|}{x}$  c) $y=\dfrac{\cos(x)}{x}$  d) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$

e) $y=x\cdot\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$  f) $y=\dfrac{x}{x^2-6x+8}$  g) $y=\dfrac{1}{1+2\operatorname{sen}x}$  h) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$

***Funciones exponenciales***

El concepto de potencia se ha ampliado considerablemente desde que estudiaste por primera vez las potencias de exponente natural en la Escuela Básica; ahora podemos calcular potencias de exponente racional.

Las ampliaciones sucesivas se han realizado de manera que siguen teniendo validez las siguientes propiedades de las potencias.

**Propiedades de las potencias**

**Si $a$ y $b$ son números reales positivos y s y t números racionales, se cumple:**

$a^s \cdot a^t = a^{s+t}$ $\quad (a \cdot b)^s = a^s \cdot b^s$ $\quad (a^s)^t = a^{s \cdot t}$ $\quad \dfrac{a^s}{a^t} = a^{s-t}$ $\quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^s = \dfrac{a^s}{b^s}$

Estas propiedades se aplican en numerosas situaciones.

**Ejemplo 84:** Resuelve las ecuaciones siguientes

a) $6^x = 216$ b) $\dfrac{9^{x-2}}{3^{x+2}} = 729$ c) $3^{1-x^2} = \dfrac{1}{27}$

d) $2^{x-1} + 4^{x-2} = 3$ e) $5^{x-2} + 5^x + 5^{x+2} = 651$ f) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 90 \\ 3^{x+y} = 729 \end{cases}$

**Resolución:**

a) $6^x = 216 \Rightarrow 6^x = 6^3 \Rightarrow x = 3$

b) $\dfrac{9^{x-2}}{3^{x+2}} = 729 \Rightarrow \dfrac{\left(3^2\right)^{x-2}}{3^{x+2}} = 3^6 \Rightarrow \dfrac{3^{2x-4}}{3^{x+2}} = 3^{2x-4-(x+2)} = 3^{x-6} = 3^6 \Rightarrow x - 6 = 6 \Rightarrow x = 12$ .

c) $3^{2-x^2} = \dfrac{1}{27} \Rightarrow 3^{1-x^2} = 3^{-3} \Rightarrow 1 - x^2 = -3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\, 2.$

d) $2^{x-1} + 4^{x-2} = 3 \Rightarrow 2^{x-1} + \left(2^2\right)^{x-2} = 3 \Rightarrow 2^{x-1} + 2^{2x-4} = 3 \Rightarrow 2^{x-1} + 2^{-2} \times 2^{2x-2} = 3$

Si sustituimos $2^{x-1}$ por $z$, obtenemos la ecuación $z + \dfrac{z^2}{4} = 3$ que es una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son $z = -6$ y $z = 2$.

Esto conduce a dos ecuaciones: $2^{x-1} = -6$ que no tiene soluciones reales y $2^{x-1} = 2$ que tiene solución real $x=2$. Luego la ecuación dada tiene una única solución $x=2$.

e) $5^{x-2}+5^{x}+5^{x+2}=651 \Rightarrow 5^{x-2}+25 \times 5^{x-2}+5^{4} \times 5^{x-2}=651 \Rightarrow 651 \times 5^{x-2}=651$ luego se obtiene $5^{x-2}=1$ que conduce a $x-2=0 \Rightarrow x=2$.

f) En este caso se trata de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, tenemos dos posibilidades para proceder:

1ra. Lo convertimos en un sistema cuadrático mediante las sustituciones $3^x$=u , $3^y$=v:

$$\begin{cases} 3^x + 3^y = 90 \\ 3^x \cdot 3^y = 729 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u + v = 90 \\ u \cdot v = 729 \end{cases}$$ Este se reduce a una ecuación cuadrática mediante

una sustitución $u = 90 - v \Rightarrow u \cdot v = (90 - v) \cdot v = 90v - v^2$, luego se obtiene la ecuación $90v - v^2 = 729$ que tiene las soluciones $v = 9$ y $v = 81$ de las que resulta para $u = 81$ y $u = 9$.

Volviendo al sistema original obtenemos $3^y = 9 \Rightarrow y = 2$ y $3^y = 81 \Rightarrow y = 4$ y también $3^x = 81 \Rightarrow x = 4$ y $3^x = 9 \Rightarrow x = 2$. Luego para el sistema tenemos las soluciones $x = 4$, $y = 2$ y también $x = 2$, $y = 4$.

2da. Observamos que la segunda ecuación significa $3^{x+y} = 3^6 \Rightarrow x + y = 6$ y entonces se sustituye esta relación en la primera ecuación:

$3^x = 3^{6-x} = 90 \Rightarrow 3^{2x} + 729 = 90 \cdot 3^x$ que con la sustitución $3^x = z$ se convierte en:

$z^2 - 90z + 729 = 0$ que es la misma ecuación cuadrática anterior y, por tanto, conduce a las mismas soluciones.

La figura 1.81 muestra una representación de la gráfica de la correspondencia:

$$x \to 2^x,\ x \in \left\{ \frac{n}{100} \ / \ n \in \mathrm{N} \right\}$$

esta gráfica ilustra que la función así definida no es continua, en efecto deja de estar definida en muchos puntos.

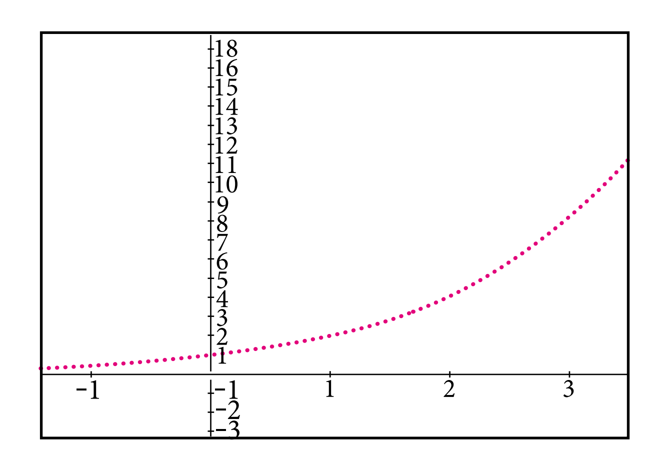


Figura 1.81

Si extendemos la correspondencia a todos los racionales, los “huecos” no pueden apreciarse a simple vista pero igual existen.

Es decir, la función definida por la correspondencia mencionada no es continua. Sin embargo, podría comprobarse que existe una función numérica continua definida para todos los reales y que coincide con ella sobre Q. **Esta última función es la función exponencial de base 2.**

Las propiedades fundamentales de la exponencial de base 2 se infieren a partir de la gráfica y del hecho de que es continua:

$f(x) = 2^x$ $\quad Dom\, f = \Re$ $\quad \operatorname{Im} f = \Re^+ - \{0\}$ Ceros: No tiene

Monotonía: **Creciente** Máximos y mínimos: **No tiene** **Continua** en todo $\Re$

El eje "X" es asíntota horizontal a la izquierda: $\lim_{x\to-\infty} 2^x = 0$ y $\lim_{x\to+\infty} 2^x = +\infty$.

No es par ni impar, ni periódica. Es **inyectiva** pues las rectas horizontales cortan en un único punto a la gráfica, es decir, $2^{x_1} = 2^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$.

La continuidad de esta función nos permite calcular potencias de exponente irracional aproximándolas mediante potencias de exponente racional. Basta tomar las aproximaciones racionales del exponente y las potencias obtenidas son aproximaciones de la potencia buscada.

**Ejemplo 85: Calcula $2^{\sqrt{3}}$.**

**Resolución:** Las tablas 5 y 6 contienen en la primera fila aproximaciones por defecto y por exceso, respectivamente, de $\sqrt{3}$; la segunda fila son potencias de base 2 y cuyo exponente son esas aproximaciones. Estas potencias aproximan la potencia buscada.

| $x$ | 1.7 | 1.73 | 1.732 | 1.7321 | 1.73205 | 1.732051 | 1.7320508 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^x$ | 3.249010 | 3.317278 | 3.321880 | 3.322110 | 3.321995 | 3.321998 | 3.321997 |

**Tabla 5**

| $x$ | 1.8 | 1.74 | 1.733 | 1.7321 | 1.73206 | 1.732051 | 1.7320509 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^x$ | 3.482202 | 3.340352 | 3.324183 | 3.322110 | 3.322018 | 3.321998 | 3.321997 |

**Tabla 6**

Por la coincidencia de cifras se ve que las primeras cifras de $2^{\sqrt{3}}$ son: 3.32199.

Con la misma idea es posible definir las funciones exponenciales de base positiva y exponente real.

**Sea $a > 0$, la función $x \to a^x$ con dominio $\Re$ es la función que coincide con $a^x, x \in Q$ en los valores racionales. Se llama función exponencial de base a.**

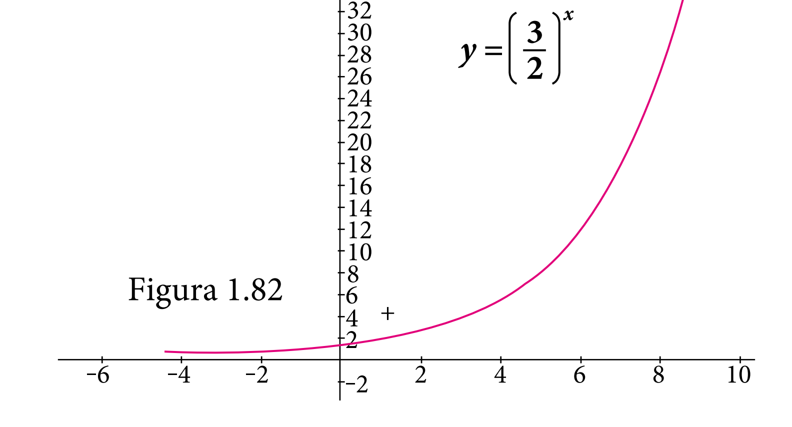
De esta forma ahora se pueden calcular potencias de exponente cualquiera, siempre que la base sea positiva. En el caso de la base 10, las calculadoras científicas tienen una tecla que permite calcular las potencias de base 10. Por ejemplo para calcular $10^{\sqrt{3}}$ procedemos así: $3 \to \sqrt{\ } \to \text{inv} \to 10^x$. Así calculamos primero $\sqrt{3}$ en la forma que conoces y después la potencia, usamos la tecla de invertir porque en la mayoría de las calculadoras la tecla directa calcula una función que estudiaremos en este capítulo.

Además ahora disponemos de una nueva clase de funciones, las funciones exponenciales de base positiva.

**Ejemplo 86:** Analiza las funciones **a)** $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ **b)** $g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

**Resolución:**

**a)** Las propiedades fundamentales de la exponencial de base $\frac{3}{2}$ se infieren a partir de la gráfica (figura 1.82) y del hecho de que es continua:
$Dom\, f = \Re \quad \text{Im}\, f = \Re^+ - \{0\}$

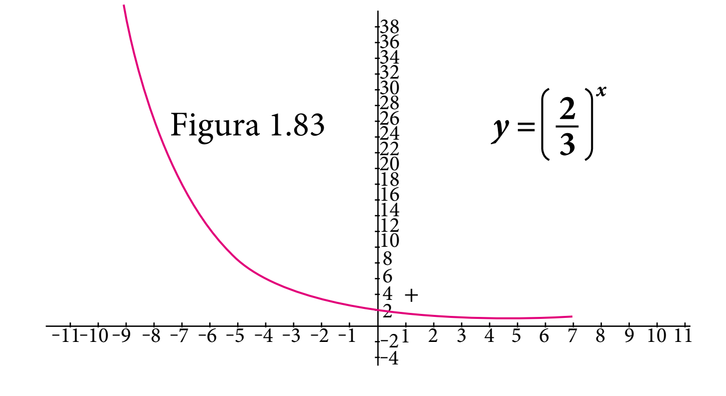



Ceros: No tiene
Monotonía: **Creciente**
Máximos y mínimos: **No tiene**
**Continua** en todo $\Re$

El eje "X" es asíntota horizontal a la izquierda: $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x = 0.$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x = +\infty$ .

No es par ni impar, ni periódica. Es inyectiva pues las rectas horizontales cortan en un único punto a la gráfica, es decir, $\left(\frac{3}{2}\right)^{x_1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$ .

b) Las propiedades fundamentales de la exponencial de base $\left(\frac{2}{3}\right)$ se infieren a partir de la gráfica (fig. 1. 83) y del hecho de que es continua: $Dom\, f = \Re \quad \text{Im}\, f = \Re^+ - \{0\}$




Monotonía: **Decreciente**
Máximos y mínimos: **No tiene**
**Continua** en todo $\Re$
El eje "X" es asíntota horizontal a la derecha $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0.$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = +\infty$

No es par ni impar, ni periódica. Es inyectiva pues las rectas horizontales cortan en un único punto a la gráfica, es decir, $\left(\frac{2}{3}\right)^{x_1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$.

**Resumen**

**Las funciones $y = a^x$ se llaman funciones exponenciales de base a.**
**Tienen dominio $\Re$ e Imagen $\Re^+ - \{0\}$.**
**Si $a = 1$ es la función constante $y = 1$.**
**Son inyectivas, continuas y no tienes ceros ni máximos ni mínimos. Todas pasan por (0,1).**

**Si $a > 1$:** $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$, $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$, es creciente

**Si $0 < a < 1$:** $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$, es decreciente

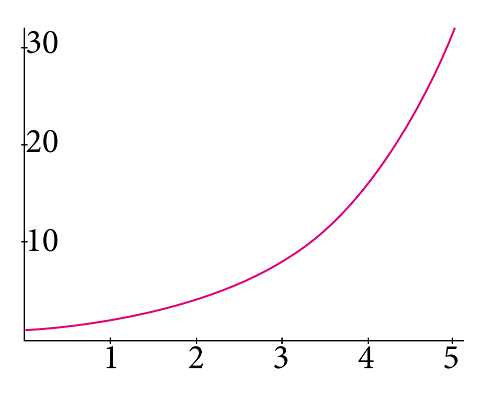
Las funciones exponenciales son muy útiles para modelar muchos procesos de la realidad, en particular los fenómenos de crecimiento de poblaciones que no están sometidas a restricciones (por ejemplo las etapas iniciales de un cultivo de bacterias) y el decrecimiento de sustancias radioactivas.

**Ejemplo 87:** Un problema donde aparecen estas funciones es cuando se analiza la reproducción, por hora, de un cultivo de bacterias, tal como se muestra en la siguiente tabla para los primeros cinco períodos.

| Periodo ($x$) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Número de bacterias ($y$) | 2 | 2 x 2 = 4 | 4 x 2 = 8 | 8 x 2 = 16 | 16 x 2 = 32 |

Si representamos estos datos en un sistema cartesiano de manera que los períodos se ubiquen sobre las abscisas (eje de las X) y la cantidad de bacterias en las ordenadas (eje de las Y), se obtiene la siguiente gráfica:

¿A partir del gráfico, podemos determinar "prácticamente" la cantidad de estas bacterias que habría en cualquier período?




Para determinar el ***modelo matemático*** que permite cuantificar el número de bacterias ($y$) en un cierto período ($x$) analicemos los valores de la tabla anterior. En el primer período, para $x$=1, tenemos que $y=2=2^1$, en el segundo, para, $x$=2, $y=4=2^2$, en el tercero para $x$=3, $y=8=2^3$, si generalizamos tenemos que en el período "$x$" el número de bacterias es $2^x$. Así que la función exponencial que representa el número de bacterias es: $y=2^x$.

¿Cuántos períodos $x$ se necesitan para obtener 512 bacterias? Para calcularlo basta con resolver la ecuación exponencial: $512 = 2^x$.

Para resolverla se calcula el logaritmo de 512 en base $b = 2$, entonces:

$x = \dfrac{\log 512}{\log 2} = 9$. Obsérvese que esta ecuación también se puede resolver más directamente de la siguiente manera: $512 = 2^9 = 2^x \Rightarrow x = 9$.

**Ejemplo 88:** En un cultivo de bacterias la cantidad de bacterias presentes en un instante, $t$, es una función exponencial del tiempo. Si $C(t)$ representa la cantidad de bacterias en el instante $t$ y $C_0$ es la cantidad inicial se tiene: $\mathbf{C(t) = C_0 a^t}$, donde a es una constante que depende del tipo de bacterias.

Si un cierto cultivo de bacterias se triplica en 2 días, encuentra la función que describe el crecimiento, sabiendo que a los 4 días había 4.5 kg de bacterias.

**Resolución:** Sabemos que debemos encontrar una ecuación del tipo $C(t) = C_0 a^t$, para determinarla debemos encontrar $C_0$ y $a$. Para buscar estas constantes tenemos 2 relaciones: $C(2) = C_0 a^2 = 3 \cdot C_0$ y $C(4) = C_0 a^4 = 4.5$ kg.

De la primera obtenemos $C_0 a^2 = 3 \cdot C_0 \Rightarrow a^2 = 3$, luego $a = \sqrt{3}$.

De la segunda resulta: $C_0 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^4 = 4.5 \Rightarrow C_0 = \dfrac{4.5}{9} = 0.5$

La ecuación es entonces $C(t) = 0.5\left(\sqrt{3}\right)^t$ en la que la cantidad está expresada en kg y el tiempo en días.

**Ejemplo 89:** Uno de los grandes aportes del siglo XX al conocimiento del mundo lo fue el descubrimiento de la radioactividad. Los átomos de las sustancias radioactivas se transforman en átomos de otras sustancias y emiten radiación. La descripción del proceso de desintegración se puede hacer con funciones exponenciales: $\boldsymbol{d(t) = d_0 a^t}$ en la que $d_0$ es la cantidad inicial de sustancia, $a$ es una constante que depende de la sustancia y $d(t)$ es la función que describe el proceso.

El periodo de tiempo que demora una cierta cantidad de sustancia en reducirse a la mitad se llama el periodo de semidesintegración; el Talio tiene un periodo de semidesintegración de 3 minutos. Encuentra la función que describe la desintegración del Talio.

**Resolución:** Sabemos que debemos encontrar la constante $a$ en la expresión de la función, la cantidad inicial no es necesaria pues la función describe el proceso para cualquier cantidad inicial. Es usual representar por T el periodo de semidesintegración, entonces:

$$d(T) = d_0 a^T = \frac{d_0}{2} \Rightarrow a^3 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \sqrt[3]{0.5} \text{ y la función es } d(t) = d_0\left(\sqrt[3]{0.5}\right)^t.$$

## ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE:

**Act-138)** Completa la siguiente tabla de la sucesión de números determinados por la expresión indicada

| n | $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{n+1}{n}\right) = ?$ | n | $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = ?$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $a_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = \left(\frac{2}{1}\right)^1 = 2$ | 10 | $a_{10} = \left(\frac{11}{10}\right)^{10} = 2.4414$ |
| 2 | $a_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2.25$ | $10^2$ | |
| 3 | $a_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 =$ | $10^4$ | |
| 4 | $a_4 = \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{5}{4}\right)^4 = 2.4414$ | $10^5$ | $a_{10^5} = \left(\frac{100001}{100000}\right)^{100000} = 2.718268$ |
| 5 | $a_5 = \left(1+\frac{1}{5}\right)^5 = \left(\frac{6}{5}\right)^5 =$ | $10^6$ | $a_{10^6} = \left(\frac{1000001}{1000000}\right)^{1000000} = 2.718280$ |
| 6 | $a_6 = \left(1+\frac{1}{6}\right)^6 = \left(\frac{7}{6}\right)^6 =$ | $n \to \infty$ | $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$ |

**Nota:** el número $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, se denomina ***"Número de Euler"*** y es muy utilizado como base de algunas funciones exponenciales.

**Act-139)** Aplicando las propiedades de las potencias, verifique las siguientes igualdades:

a) $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + ... + x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1})$ ; $n \in \mathbb{N}$

b) $\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^4} + 8x^{1/3}y}{x^{2/3} - 2\sqrt[3]{xy} + 4y^{2/3}} - 2\sqrt[3]{xy}\right)^6 = x^4$

**Act-140)** Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5^x = 125$ b) $2^x = \frac{1}{4}$ c) $25^x = \frac{1}{125}$ d) $9^x = 243$

e) $2^x = 2\sqrt{2}$ f) $8^{2x} = 128$ g) $\sqrt{6^x} = 36$ h) $3^{2x+1} = 1$

i) $6^x = 36\sqrt[3]{6}$ j) $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x} = \frac{27}{125}$ k) $6^{3x+4} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{36}$ l) $3^{3-6x} = \frac{27}{3\sqrt{81}}$

m) $\left(3^{x^2-x}\right)^{\sqrt{2}} = 9^{\sqrt{2}}$ n) $2^{\frac{x}{3}+2} = 8$ ñ) $7^{x+2} = \frac{1}{343}$ o) $\left(2^x\right)^{x+3} = 16$

p) $(3^x)^{x-1} = 1$ q) $9^{-3x} = \left(\frac{1}{27}\right)^{x+3}$ r) $(2^x \cdot 32)^x = \frac{1}{64}$ s) $(4^x)^x \cdot 64^x = \frac{1}{16}$

**Act-141)** Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 3^{x+y} = 1 \\ 2^{x+2y} = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2^{x+y} = 32 \\ 2^{x-y} = \frac{1}{8} \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5^x \cdot 5^y = 125 \\ 25^y \cdot 5^{3x} = 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2^{x-3} = \frac{2y}{64} \\ 32 \cdot 2^x = 4^y \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4^{x+\frac{5}{2}y} = \frac{1}{64} \\ 2^{3x-4y} = 4^7 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 7^x : 7^{2y} = 49 \\ 7^y \cdot \mathbf{49}^{2x} = \frac{1}{7} \end{cases}$ g) $\begin{cases} 4^{x^2+3x} = \frac{2y}{64} \\ 16 \cdot 2^{x+1} = 2^y \end{cases}$ h) $\begin{cases} 9^x = 81y \\ 3^{x+1} = 9y \end{cases}$

**Act-142)** Grafica (con un procesador) y analiza las funciones

a) $f(x) = 4^x$ b) $f(x) = -4^x$ c) $f(x) = 4^x + 2$ d) $f(x) = 10^x$ e) $f(x) = 8^{2x}$

f) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ g) $f(x) = \left(\frac{5}{2}\right)^x$ h) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x + 3$ i) $f(x) = 2\left(\frac{1}{5}\right)^x + 3$

**Act-143)** Para determinar la edad de una roca la ciencia geológica actualmente ha podido desarrollar una técnica basada en la concentración de material radiactivo en su interior. Cuanto más joven es la roca mayor concentración de material radiactivo encontraremos. Para calcular esta concentración la fórmula que se utiliza es $C(t) = k \times 3^{-t}$, donde $C(t)$ representa la concentración del material radiactivo, t el tiempo transcurrido medido en cientos de años y "$k$" la concentración del elemento en el momento de formarse la roca. Así para una roca con $k = 4700$; a) ¿Cuánto tiempo debe haber pasado para que hallemos en ella una concentración de $1500$? ; b) ¿Qué concentración tendríamos al cabo de dos siglos?; c)¿En qué tiempo se acabaría este material?

**Act-144)** En los seres vivos se presentan 2 isótopos del carbono, el más abundante que es el de peso atómico 12 (Carbono 12) y el de peso atómico 14 que es radioactivo (Carbono 14). La desintegración del Carbono 14 se describe mediante la función $C_{14}(t) = C_0 e^{-0.000121t}$ en la que t representa la cantidad de años transcurrida desde la muerte del organismo, $C_{14}(t)$ la cantidad de carbono presente en ese momento y $C_0$ la cantidad inicial de Carbono 14. Este hecho se utiliza para fechar los fósiles. Si en los restos de un hombre prehistórico se encuentra que aparece un 54.6% de la cantidad inicial de Carbono 14, calcula la edad de los restos.

**Act-145)** El número de bacterias en un cierto cultivo es $N(t) = N_0 \cdot 2^{kt}$ donde $t$ se mide en horas. Si al cabo de 4 horas, el número de bacterias es $\sqrt[8]{2}$ veces lo que había al principio, ¿en qué tiempo se duplicará el número de bacterias?

**Act-146)** La población de un pequeño país crece según la función $P = 2\,400\,000(\mathbf{1.03}^t)$ en la que $t$ representa los años transcurridos desde 1990.

a) ¿Cuál era la población en 1990? b) ¿Cuál será la población en el 2010

**Act-147)** El periodo de semidesintegración de una sustancia radioactiva es de 693.15 años. ¿Cuál es la función que describe la desintegración de esta sustancia?

**Act-148)** ¿Cuál es el capital acumulado a partir de un capital inicial de $15,000.00 invertido al 16 % compuesto anualmente en tres años?

**Act-149)** ¿Cuál sería el capital acumulado, después de 9 años, de $5,000.00 invertidos en la banca, si se capitalizan con el 20% anual pero compuesto 5 veces al año?

**Act-150)** Si tres personas de un grupo de 600 saben un secreto, el número de personas que sabrá el secreto al cabo de $t$ días es $N(t) = \frac{600e^t}{e^t + 200}$. (a) ¿Aproximadamente cuántas personas sabrán el secreto a los 6 días? (b) ¿Cuántos días pasarán para que al menos 500 personas sepan el secreto?

**Act-151)** En 1987, la población mundial de la tierra fue estimada en 5000 millones de personas y la tasa relativa de crecimiento de 2% anual. Suponiendo que la población sigue un modelo de crecimiento exponencial del tipo $P(t)= n_0e^{r\cdot t}$, donde, $P(t)$ es la cantidad de población al tiempo $t$, $n_0$ es el número inicial de personas al hacer el pronóstico, $r$ es la tasa relativa de crecimiento anual y $t$ el tiempo al cual se realiza la estimación. Determina la población mundial pronosticada para los años 2000 y 2012.

***Funciones logarítmicas***

En el epígrafe anterior resolvimos algunas ecuaciones exponenciales sobre la base del conocimiento de las funciones exponenciales, sus propiedades y algunas potencias. Sin embargo, estos recursos no son siempre suficientes para resolver ecuaciones exponenciales, basta que no conozcamos las potencias implicadas y no se puede obtener la solución. Por ejemplo no podemos resolver una ecuación tan sencilla como $2^x=15$.

Para encontrar solución a esta ecuación podría servir una función inversa de la **función exponencial de base 2;** sabemos que la inversa de esta función existe pues es inyectiva. Para estudiar esta función inversa, comenzamos por trazar su gráfico que podemos obtener como el simétrico del gráfico de $x \to 2^x$ con respecto a la bisectriz de los cuadrantes primero y tercero (figura 1.84). Esta función se llama **logaritmo de base 2** y se simboliza $x \to \log_2 x$ (fig. 1.84). De la gráfica se infieren las principales propiedades de la función:

$Dom\log_2 = \Re + -\{0\}$ $\quad Im\log_2 = \Re.$

Es creciente y tiene un cero en $x=1$.

El eje “Y” es una asíntota vertical a la derecha: $\lim_{x\to 0^+}\log_2 = -\infty$ y crece indefinidamente al acercarse a $+\infty$, o sea $\lim_{x\to\infty}\log_2(x) = \infty$.

No tiene máximo ni mínimo y es continua. Además $\log_2(2^x) = x$ y $2^{\log_2 x} = x$

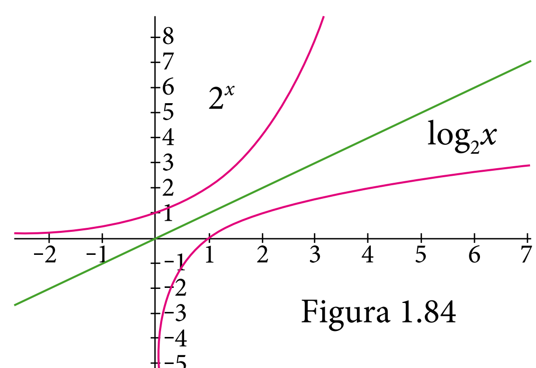



Figura 1.84

Lo mismo que hemos hecho para la función exponencial de base 2 puede hacerse para cualquier función exponencial de base diferente de 1 pues son inyectivas.

En la figura 1.85 se ha representado la función $y = (0.5)^x$ y su función inversa $y = log_{0.5}\, x$, de aquí se infieren las propiedades de ésta:

$Domlog_{0.5} = \Re - \{0\}$ $Imlog_{0.5} = \Re$, decreciente, tiene un cero en $x$=1, el eje "Y" es una asíntota vertical a la derecha: $\lim_{x\to 0^+} log_{0.5}(x) = +\infty$, decrece indefinidamente al acercarse a $+\infty$:

$$\lim_{x\to +\infty} log_{0.5}(x) = -\infty$$

No tiene máximo ni mínimo y es continua.

Además $log_{0.5}\left((0.5)^x\right) = x$ y $(0.5)^{log_{0.5} x} = x$

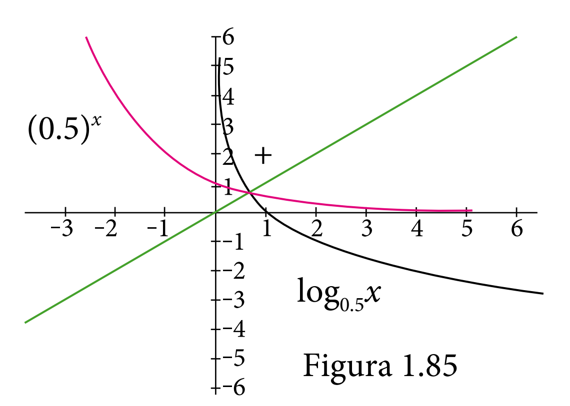


Figura 1.85

Los casos analizados muestran que se puede definir la función inversa de una función exponencial de base $a > 0$ y $a \neq 1$. Las inversas de las funciones exponenciales son llamadas funciones logarítmicas de base a, y se denotan como: $\boxed{y = log_a(x)}$ .

De donde, por ser inversas resulta que $\boxed{log_a(a^x) = x,\ a^{log_a(x)} = x,\ a > 0 \text{ y } a \neq 1}$

**Ejemplo 90:** Calcula el valor de $x$ en las siguientes expresiones.

**a)** $log_8(x) = 2$ **b)** $log_b(x) = 0$ **c)** $log_{10}(x) = 0.25$ **d)** $log_9(27) = x$ **e)** $log_{10}(35) = x$

**Resolución:**

a) Por la definición como inversa tenemos $\log_8 x = 2 \Rightarrow x = 8^2 = 64$

b) Igualmente $log_b\,(x) = 0 \Rightarrow x = b^0 = 1$

c) $log_{10} x = 0.25 \Rightarrow x = 10^{0.25} = \sqrt[4]{10} \approx 1.778$

d) $log_9 27 = log_9(9 \cdot 3) = log_9 9 + log_9 3 = log_9 9 + log_9 9^{0.5} = 1 + 0.5 = 1.5$

e) En este caso no se puede transformar en una potencia conocida de 10. Usamos calculadora y se obtiene $\log_{10}(35) \approx 1.544$.

**Ejemplo 91:** Determina el valor numérico de las expresiones:

**a)** $log_a\, a\sqrt[3]{a}$ **b)** $log_3 3^{log_a a^5}$ **c)** $log_2 5$

**d)** $log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{64}$ **e)** $log_{10}\left(^{log_{10}} 10^{10}\right)$ **f)** $log_{10}\left(10^{10 log_{10} 10^2}\right)$

**Resolución:**

**a)** $log_a\, a\sqrt[4]{a} = log_a\, a^{\left(\frac{4}{3}\right)} = \frac{4}{3}$ **b)** $log_3 3^{log_a a^5} = log_a a^5 = 5$

c) En este caso como las calculadoras no tienen incorporados los logaritmos de base 2, con un procesador (por ejemplo el Derive) se obtiene que $log_2(5) \approx 2.3219$.

d) $log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{64} = log_{\frac{1}{2}}\left(2\right)^{2} = log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -2$ e) $log_{10}(log_{10}10^{10}) = log_{10}(10) = 1$

f) $log_{10}\left(10^{10 log_{10} 10^2}\right) = 10 log_{10} 10^2 = 10 \cdot 2 = 20$

***La expresión $a^{log_a(x)} = x$ caracteriza al logaritmo como el exponente al cual hay que elevar la base para obtener la potencia deseada.Y de aquí se derivan sus siguientes propiedades:***

**Propiedades de los logaritmos.**

$$log_a(x \cdot y) = log_a(x) + log_a(y)$$

$$log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a(x) - log_a(y)$$

$$log_a\left(x^r\right) = r\, log(x) \qquad log_a x = \frac{log_b x}{log_b a}$$

**Estas propiedades se cumplen cualquiera sea $a, b > 0$ y $a, b \neq 1$.**

Estas propiedades aritméticas de los logaritmos fueron las que motivaron a John Napier para su invención tal como viste en las referencias históricas de este capítulo. En efecto en el siglo XVII los problemas astronómicos y físicos requerían cálculos complejos y laboriosos que se simplificaban extraordinariamente con el uso de las propiedades de los logaritmos. Las propiedades también son útiles para resolver ecuaciones en las que intervienen logaritmos.

**Ejemplo 92:** Resuelve las ecuaciones siguientes

**a)** $log_b x = log_b 5$ **b)** $log_a x = 3 log_a 2$ **c)** $log_{10} x - log_{10} 3 = 2$ **d)** $27 = 2^{3x}$

**e)** $2 log_9(2x - 2) = 1$ **f)** $log_{2\sqrt{2}} x = 4$ **g)** $\begin{cases} log_2(x + y) = 3 \\ \dfrac{2^x}{2^y} = 5^{log_5 2} \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} 2^{x+y} = 24 \\ 2^x - 2^y = 5 \end{cases}$

**Resolución:**

a) $log_b x = log_b 5 \Rightarrow x = 5$ por la inyectividad de la función logaritmo.

b) $log_a x = 3\, log_a 2 \Rightarrow log_a x = log_a 2^3 \Rightarrow x = 2^3 = 8$

c) $log_{10} x - log_{10} 3 = 2 \Rightarrow log_{10} \frac{x}{3} = 2 \Rightarrow \frac{x}{3} = 10^2 \Rightarrow x = 300$

d) $27 = 2^{3x} \Rightarrow log_2 27 = 3x \Rightarrow x = \frac{1}{3} \cdot log_2 27 = log_2 27^{\frac{1}{3}} = log_2 3 \approx 1.585$, este último cálculo lo hacemos con un procesador.

e) $2log_9(2x-2)=1 \Rightarrow log_9(2x-2)=\frac{1}{2} \Rightarrow 2x-2=9^{\frac{1}{2}}=3 \Rightarrow 2x=5 \Rightarrow x=2.5$

f) $log_{(2\sqrt{2})}x=4 \Rightarrow x=\left(2\sqrt{2}\right)^4=64$

g) $\begin{cases} log_2(x+y)=3 \\ \frac{2^x}{2^y}=5^{\log_5 2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=8 \\ 2^{x-y}=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=8 \\ x-y=1 \end{cases}$

Sumando ambas ecuaciones resulta $2x=9 \Rightarrow x=4.5$, luego, $4.5+y=8 \Rightarrow y=3.5$. Y la solución es (4.5 , 3.5). Comprobando: $log_2(4.5+3.5)=log_2(8)=3$, $\frac{2^{4.5}}{2^{3.5}}=2^{4.5-3.5}=2.$

h) $\begin{cases} 2^{x+y}=24 \\ 2^x-2^y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x\cdot 2^y=24 \\ 2^x-2^y=5 \end{cases}$

Haciendo $2^x=u,\ 2^y=v$ obtenemos $\begin{cases} uv=24 \\ u-v=5 \end{cases}$ de donde resulta luego $v=\frac{24}{u}$ y $u-\frac{24}{u}=5$ luego $u^2-5u-24=0$ las soluciones son $u=8$ y $u=-3$. Sólo tiene sentido la solución positiva, entonces $u=8$ y $v=3$ de ahí:

$2^x=8 \Rightarrow x=3,\ 2^y=3 \Rightarrow y=log_2 3 \approx 1.585.$

Comprobando:$2^{x+y}=2^{3+log_2 3}=2^3\cdot 2^{log_2 3}=8\cdot 3=24$ y $2^x-2^y=2^3-2^{log_2 3}=8-3=5.$

**Ejemplo 93:** Analiza las funciones **a)** $f(x)=log_{10}(x)$ **y b)** $g(x)=log_{\frac{1}{10}}(x).$

**Resolución:** a) La figura 1.86 representa la gráfica de la función obtenida con el procesador Derive. De esta gráfica inferimos: $Dom\ log_{10}=\Re^+-\{0\}$ $\quad \text{Im}log_{10}=\Re$ **es creciente**, tiene un cero en $x$=1, el eje"Y" es una asíntota vertical a la derecha:

$$\lim_{x\to 0^+} log_{10}(x)=-\infty$$

crece indefinidamente al acercarse a $+\infty$: $\lim_{x\to+\infty} log_{10}(x)=+\infty$ .

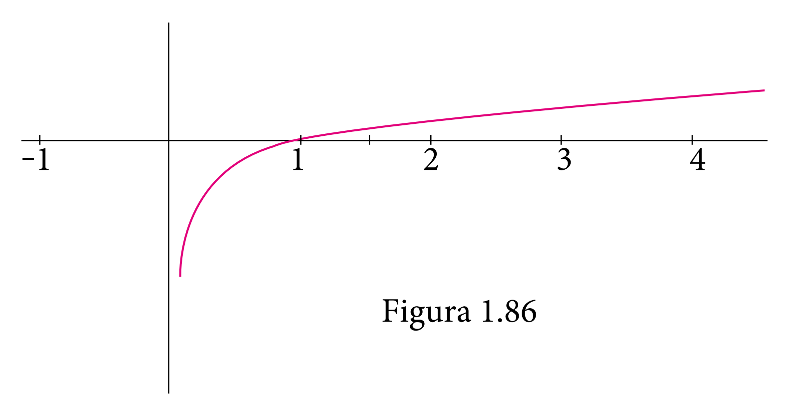


Figura 1.86

No tiene máximo ni mínimo. Es continua. $log_{10}(10^x)=x$ y $10^{log10x}=x.$

b) En la figura 1.87 se ha representado la función $y = log_{0.1}x$, de aquí se infieren las propiedades de ésta: $Dom\ log_{0.1} = \Re^+ - \{0\}$, $\text{Im}\ log_{0.1} = \Re$, es **decreciente**, tiene un cero en $x=1$, el eje "Y" es una asíntota vertical a la derecha: $\lim_{x\to 0^+} log_{0.1}(x) = +\infty$, decrece indefinidamente al acercarse a $-\infty$: $\lim_{x\to +\infty} log_{0.1}(x) = -\infty$.

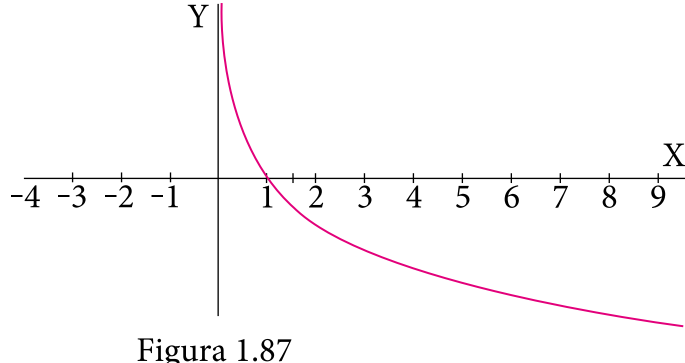


Figura 1.87

No tiene máximo ni mínimo: Es continua. Y $log_{0.1}\left((0.1)^x\right) = x$ ; $(0.1)^{log_{0.1}x} = x$

**Resumiendo:** Los ejemplos de funciones logarítmicas que hemos analizado, muestran que comparten un grupo de propiedades y que para otro grupo de propiedades hay diferencias entre las que tienen base mayor que 1 y las que la tienen menor.

Si $\boldsymbol{a > 0}$ **y** $\boldsymbol{a \neq 1}$, para la función logaritmica $\boldsymbol{f(x) = log_a(x)}$ se cumple:
$\boldsymbol{Dom\ f = \Re^+ - \{0\}}$ $\boldsymbol{\text{Im}\ f = \Re}$, tiene un único cero $x = 1$, no tiene máximo ni mínimo, no es periódica, no es par ni impar. Es inyectiva y su inversa es $\boldsymbol{f^{-1}(x) = a^x}$.

Si $\boldsymbol{a > 1}$ **es creciente** en todo su dominio, el eje "Y" es una asintota vertical a la izquierda $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, crece indefinidamemte al acercarse a $+\infty$: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

**Si** $\boldsymbol{a < 1}$ **es decreciente** en todo su dominio, el eje "Y" es una asíntota vertical a la izquierda $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, decrece indefinidamente al acercarse a $+\infty$: $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$.

**Ejemplo 94:** Para medir magnitudes que crecen muy rápidamente se utiliza la llamada ***escala logarítmica.*** Por ejemplo la magnitud ***R*** de un terremoto en la ***escala de Richter*** se mide utilizando la expresión $\boldsymbol{R = log_{10}\frac{I}{I_0}}$ en la que ***I*** es la intensidad del terremoto y $I_0$ la de un terremoto utilizado como patrón. ¿Cuál es la razón entre las intensidades de un terremoto de magnitud 8.3 (Yokohama 1923) con uno de magnitud 7.2 (Kobe 1995)? ¿Cuál es la intensidad del terremoto patrón?

**Resolución:** La razón entre las intensidades es $\frac{I_y}{I_k}$, si tomamos logaritmos tendremos $log_{10}\left(\frac{I_y}{I_k}\right) = log_{10}\left(\frac{I_y / I_0}{I_k / I_0}\right) = log_{10}\frac{I_y}{I_0} - log_{10}\frac{I_k}{I_0} = 8.3 - 7.2 = 1.1$, luego, usando una calculadora científica se obtiene: $\frac{I_y}{I_k} = 10^{1.1} \approx 12.6$. O sea, la intensidad del terremoto de 1923 fue aproximadamente 12.6 veces la del de 1995.

En general si la diferencia en las magnitudes en la escala Richter es 1, la razón de las magnitudes es 10, si es 2 la razón es 100, etc.

La intensidad del terremoto patrón es $log_{10}\left(\frac{I_0}{I_0}\right) = log_{10}(1) = 0$.

***ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE:*** 

**Act-152)** Determina el valor de $x$ en:

a) $x = log_{10} 781$ b) $x = log_{10} 91$ c) $x = log_{10} 0.25$ d) $x = log_{10} 0.005$

e) $2.3 = log_{10} x$ f) $0.004 = log_{10} x$ g) $1.8 = log_{10} x$ h) $0.54 = log_{10} x$

i) $3 = log_4 x$ j) $2 = log_x 49$ k) $-2 = log_x \frac{1}{4}$ l) $5^{-2} = log_x(-1)$

**Act-153)** Dados $log_5 3 = 0.6826$, $log_5 4 = 0.8614$, $log_5 7 = 1.2091$ calcula:
a)$log_5 12$ b)$log_5 6$ c)$log_5 36$ d)$log_5 180$ e)$log_5 14$ f)$log_5 \sqrt{18}$ g)$log_5 \frac{7}{12}$

**Act-154)** Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $log_2(x+3) + log_2(x-4) = 3$

b) $log_2(x+7) - log_2(x-1) = 1$

c) $2log_{10}(x) = log_{10}(4) + log_{10}(3x)$

d) $log_2(x^2-2x-7) + log_3(x-1) = 2$

e) $log_3(x-1) + log_3(2x+1) - log_3(x-3) = 3$

f) $log_2(x) = 3 - log_2(7)$

g) $log_2(2x-3) + log_2(x+6) = 3$

h) $log_5(x-1) + log_5(2x+1) -1 = 0$

i) $log_{\sqrt{5}}(x^2-100) + log_{\sqrt{5}}(x-10) = 2$

j) $log_3(x^3-4) = log_3(x) - log_3(4-x)$

k) $log(x+1) + log(x+2) = log(x) + log(5)$

l) $log_2(x) + log_8(x) = 8$

m) $log_7(x) + log_7(x+2) = log_7(8) + log_7(6)$

n) $log_{10}(x^2) = log_{10}\left(x = \frac{11}{10}\right) + 1$

ñ) $log(x+6) - \frac{1}{2}log(2x-3) = 2-log(25)$

o) $log_x(5) + log_{25}(x) = \frac{3}{2}$

**Act-155)** Tres terremotos ocurrieron en las localidades A, B y C con magnitudes 3, 5 y 8 en la escala Richter. ¿Cuántas veces más fuerte fue el terremoto: (a) B en relación con A? (b) C en relación con B? (c) C en relación con A?

**Act-156)** En el año 1908 ocurrió un terremoto en San Francisco de California de intensidad 8.3 en la escala de Richter y otro en la frontera de Colombia y Ecuador de intensidad 8.9. ¿Cuántas veces más intenso fue el terremoto de Suramérica que el de San Francisco?

**Act-157)** Calcule la intensidad relativa de un terremoto cuyo número de Richter es de 6.4 en comparación con uno cuyo número de Richter es de 7.8.

**Act-158)** Calcule el número de Richter de un terremoto que tiene 4800 veces la intensidad de uno cuyo número de Richter es de 4.6.

**Act-159)** La intensidad del sonido también se mide en una escala logarítmica. En este caso $l = 10log_{10}(\mathrm{L})$ en la que I es la intensidad del sonido en decibeles y L la amplitud de ese sonido comparado con el límite de audibilidad. Por ejemplo el tráfico ordinario tiene una intensidad de aproximadamente 70 decibeles. Si el sonido de un cierto motor es 4000 veces el del tráfico, ¿cuál es la intensidad del sonido del motor en decibeles?

**Act-160)** El tráfico ordinario registra una intensidad de sonido de aproximadamente 70 decibeles. Un cierto motor tiene un sonido aproximadamente 4600 veces más fuerte. ¿Cuál es la intensidad del sonido del motor en decibeles?

**Act-161)** El $\boldsymbol{pH}$ de una sustancia o disolución se calcula por la expresión $pH = -log[H^+]$. Si $pH < 7$ la sustancia es ácida, si $pH = 7$ la sustancia es neutra y si $pH > 7$ la sustancia es básica. (a) Calcula el pH de la leche si su valor de $[H^+] = 4\times10^{-7}$ . (b) Calcula la concentración de $[H^+]$ del vino, si su $pH = 3.3$.

***Funciones exponencial y logarítmicas naturales***

Las propiedades de las potencias y los logaritmos permiten reducir el número de bases que se hacen necesarias para las funciones exponenciales, en efecto, es posible expresar una función exponencial con una base diferente. Por ejemplo si a y b son números positivos diferentes podemos expresar la función $y = a^x$ en la base b:

Sea $y = a^x = b^{k\cdot x}$, por definición de logaritmo, $log_b a^x = k \cdot x \Rightarrow x \cdot log_b a = k\cdot x$ , de donde, $k = log_b a$. Por tanto: $y = a^x = b^{log_b a\cdot x}$. También se puede resolver por propiedad de la función inversa, de donde se infiere que:

$$a = b^{log_b a} \Rightarrow y = a^x = \left(b^{log_b a}\right)^x = b^{log_b a\cdot(x)}$$

**Ejemplo 95:** Expresa la función $\boldsymbol{y = 2^x}$ en la base 10.

**Resolución:** $y = 2^x = 10^{(log_{10}2)(x)} = 10^{0.3x}$ ; ya que $log_{10}2 = 0.3$.

Debido a la estrecha relación entre las funciones exponenciales y las logarítmicas, se puede construir una relación análoga para las funciones logarítmicas. Se necesita encontrar un $k$ tal que $y = log_a x = k \cdot log_b x$ , razonamos hacia atrás:

$$log_a x = k \cdot log_b x \quad \Rightarrow x = a^{k\cdot log_b x} \Rightarrow log_b(x) = log_b\left(a^{\,k\cdot log_b x}\right)$$

$$\Rightarrow log_b(x) = (k\cdot log_b x)log_b a \quad \Rightarrow k = \frac{1}{log_b a}$$

$$\therefore\ log_a x = k \cdot log_b x = \frac{1}{log_b a} \cdot log_b x = \frac{log_b x}{log_b a}$$

aplicando ahora logaritmos en la base b: $log_b x = k \cdot log_b x \cdot log_b a \Rightarrow k \cdot log_b a = 1$

y resulta $k = \dfrac{1}{log_b a}$ , de ahí resulta la identidad: $\boxed{log_a x = \dfrac{log_b x}{log_b a}}$.

Esta es la identidad fundamental que relaciona las funciones logarítmicas de bases diferentes que puede ser expresada: $y = log_a x = \dfrac{log_b x}{log_b a}$. Tomando $x$=b en esta identidad resulta: $log_a b = \dfrac{log_b b}{log_b a} = \dfrac{1}{log_b a}$ que es la fórmula del cambio de base de logaritmos.

**Ejemplo 96:** Calcula: **a)** $\boldsymbol{log_8 32}$ **b)** $\boldsymbol{log_5 2 \cdot log_2 25}$

**Resolución:**

a) $= log_8 32 = \dfrac{log_2 32}{log_2 8} = \dfrac{5}{3}$ b) $= log_5 2 \cdot log_2 25 = (log_5 2)\left(\dfrac{log_2 25}{log_5 2}\right) = log_5 25 = 2$

**Ejemplo 97:** Resuelve la ecuación logarítmica $\boldsymbol{log_x 5 + log_{25} x = \dfrac{3}{2}}$

**Resolución:**

$log_x 5 + log_{25} x = \dfrac{1}{log_5 x} + \dfrac{log_5 x}{log_5 25} = \dfrac{1}{log_5 x} + \dfrac{log_5 x}{2} = \dfrac{3}{2}$ , de donde:

$(log_5 x)^2 - 3log_5 x+2=0$, cuyas soluciones son: $log_5 x =2$ o $log_5 x =1$ y obtenemos para $x$: $x=25$ o $x=5$. La comprobación es inmediata

Acabamos de ver que las funciones exponenciales y logarítmicas pueden expresarse en función de cualquier otra base, resulta natural la idea de escoger una base a la que se reduzcan las restantes, pero ¿Cuál escoger?

Para comprender la selección que se hace de la base, analicemos las secantes y tangentes a la gráfica de una función exponencial:

En la figura 1.88 consideramos dos puntos de la gráfica $(x, a^x)$ y $(x+h\ ,\ a^{(x+h)})$ y se ha trazado la secante determinada por ellos. La pendiente de esta secante es:

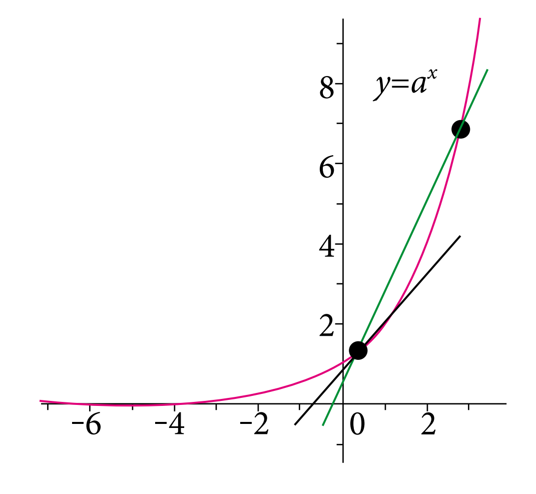


Figura 1.88

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{x + h - x} = a^x\left(\frac{a^h - 1}{h}\right)$$

Esta pendiente es el valor de la función en $x$ multiplicado por un factor que depende de la base y del valor de $h$. Si el valor de $h$ se hace tender a 0, se obtiene un factor que depende de la base. En otras palabras, en el límite la pendiente de la secante es la pendiente de la tangente y resultaría proporcional al valor de la función en el punto. Resulta natural escoger la base para la cual la constante de proporcionalidad es la unidad:

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1$$

el valor de la base para que este límite sea la unidad es el llamado número de Euler y se denota "e".

**Se llama número de Euler y se denota "e" al número que satisface la relación:**

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

**"e" es un número irracional y sus primeras cifras son** $e = 2.71828182846...$

El número "e" es uno de los más importantes de la Matemática y aparece en la modelación de muchas situaciones prácticas y teóricas, todos los procesadores tienen incorporado el valor de "$e$"[1] con un gran número de cifras decimales, así como la función "exponencial natural" $y = e^x$.

La función logarítmica inversa de esta exponencial de base **e** se llama ***función logaritmo natural o Neperiano***, $y = log_e x$ que se denota usualmente por $y = ln x$.

Por la continuidad de $y = e^x$, si $h \to 0$, $e^h \to 1$, y puede escribirse $e^x = 1+h$ con $h \to 0$, con esta sustitución resulta:

$$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{1+x-1}{ln(1+x)} = \frac{x}{ln(1+x)} = \frac{1}{ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}$$ y entonces $\lim_{x \to 0} \frac{1}{ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} = 1$ y por tanto

$\lim_{x \to 0} ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$ del que resulta el ***llamado límite fundamental algebraico:***

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Este límite es el que clásicamente se utilizó para definir al número de Euler.

[1] En el derive "$e$" se escribe apretando simultáneamente la tecla "control" y la tecla "$e$" o marcando "$e$" en la barra de símbolos matemáticos.

Si tomamos $x = \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$ podemos obtener aproximaciones numéricas sucesivas de e tan como se muestra en la tabla 8.

| n | 1 | 2 | 5 | 10 | 100 | 1000 | 10000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ | 2 | 2.25 | 2.48832 | 2.5937425 | 2.70481383 | 2.71692393 | 2.71814593 |

**Tabla 8**

Como vemos estos valores forman una sucesión que se acerca a e, aunque lentamente.

**Dos límites de gran importancia en las Matemáticas y sus aplicaciones son: a)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ **y b)** $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

**Ejemplo 98:** Calcula **a)** $\lim\limits_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$. **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+\frac{x}{3}\right)^x$

**Resolución:** a) $\lim\limits_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \left((1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right)^2 = \left(\lim\limits_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right)^2 = e^2$

b) En este caso se trata de una función continua $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+\frac{x}{3}\right)^x = (1+0)^0 = 1$

***Función exponencial de base e.***

En la figura 1.89 aparece la gráfica de la función exponencial natural $f(x)=e^x$ y, a partir de ella, resumimos **sus propiedades:**

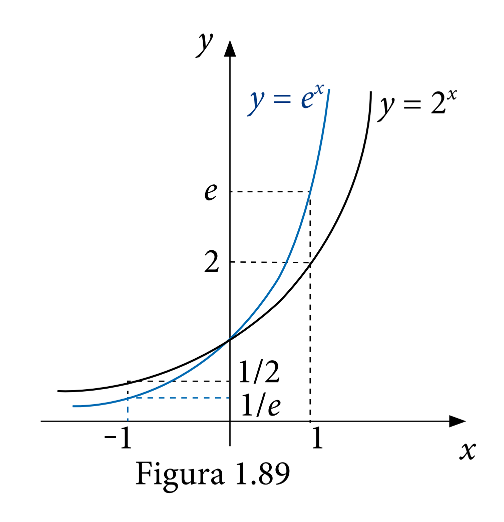


Figura 1.89

**Dominio:** $\Re$ **Imagen:** $\Re^+ - \{0\}$ (Las funciones exponenciales son siempre positivas)

**Ceros:** No tiene, la ecuación $e^x = 0$ no tiene solución. En la figura ratificamos que la función es ***creciente*** en todo su dominio. No tiene puntos de máximo ni de mínimo. No es par ni impar. Como $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ El eje "X" es asíntota horizontal a la izquierda. No tiene asíntotas verticales y, por tanto, no tiene polos. La función es inyectiva, su inversa es la función $\boxed{y = ln(x)}$ .

En la figura 1.90 aparece la gráfica de la función logaritmo natural $\boldsymbol{f(x) = ln(x)}$ y, a partir de ella, resumimos **sus propiedades:**

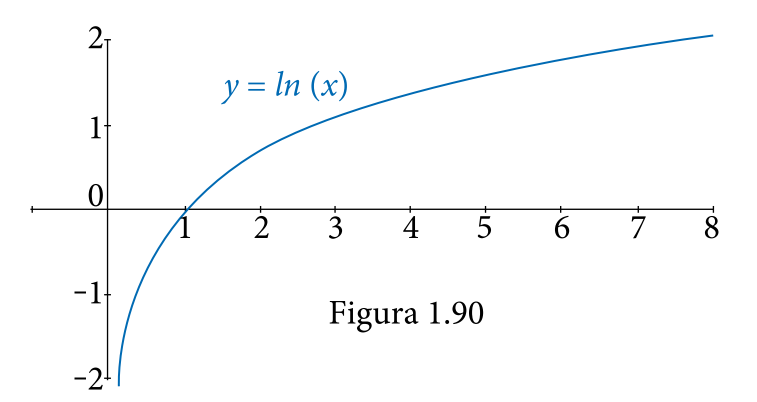


Figura 1.90

**Dominio:** $\Re^+ - \{0\}$ (El logaritmo sólo está definido para valores positivos) **Imagen:** $\Re$

Ceros: $x$=1, que es la solución de la ecuación $ln(x) = 0$.

Es ***creciente*** en todo su dominio. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

No tiene puntos de máximo ni de mínimo. No es par ni impar.

El eje "Y" es asíntota vertical a la izquierda. No tiene asíntotas horizontales.
La función es inyectiva, su inversa es la función $\boxed{y = e^x}$ .

**Ejemplo 99:**

**1. Calcula** **a)** $\boldsymbol{e^0}$ **b)** $\boldsymbol{ln(1)}$ **c)** $\boldsymbol{e^3}$ **d)** $\boldsymbol{ln(2)}$ **e)** $\boldsymbol{log_5(11)}$

**2. Resuelve las ecuaciones** **a)** $\boldsymbol{e^x = 2}$ **b)** $\boldsymbol{ln(x) = 3}$ **c)** $\boldsymbol{e^{2x} - e^x = 2}$

**Resolución.**

1.a) $e^o = 1$ pues todo número elevado a cero es 1.

b) $ln(1) = 0$ pues el logaritmo de 1 en cualquier base es cero.

c) Con una calculadora científica o un procesador cualquiera basta teclear $ln(2)$ y obtenemos:$ln(2) = 0.693147$ ...

d) Expresamos el logaritmo en base e: $log_5(11) = \dfrac{ln(11)}{ln(5)} = \dfrac{2.398}{1.609} = 1.490$ (obtenemos los logaritmos naturales utilizando la tecla $ln$ de la calculadora y dividimos)

2. a) Utilizando la función inversa tenemos $e^x = 2 \Rightarrow x = ln(2) \approx 0.69$.

b) Igualmente $ln(x) = 3 \Rightarrow x = e^3 \approx 20.10$.

c) Con la sustitución $z = e^x$ obtenemos $z^2 - z - 2 = 0 \Rightarrow (z - 2)(z + 1) = 0$
luego,$e^x = 2$ o $e^x = -1$. Como $e^x > 0$, resulta que: $x = ln(2) \approx 0.69$.

**Ejemplo 100:** Calcula **a)** $\lim\limits_{x\to -1}\left(e^{\sqrt{x+5}} - e^{x+3} + \frac{1}{e^x}\right)$ y **b)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(ln(x+1) - x\,ln(x) + \frac{1}{ln(2x)}\right)$

**Resolución:**

a) Como la función exponencial es continua

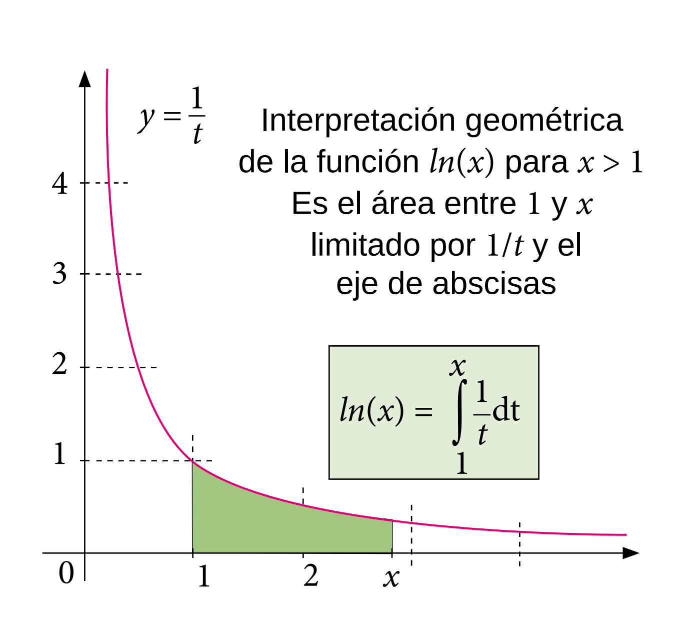
$$\lim_{x\to -1}\left(e^{\sqrt{x+5}} - e^{x+3} + \frac{1}{e^x}\right) = e^{\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{x+5}} - e^{\lim\limits_{x\to -1}(x+3)} + \frac{1}{e^{\lim\limits_{x\to -1} x}} = e^2 - e^2 + \frac{1}{e^{-1}} = e$$

b) Como la función logaritmo es continua

$$\lim_{x\to 1}\left(ln(x+1) - x ln(x) + \frac{1}{ln(2x)}\right) = ln\left(\lim_{x\to 1}(x+1)\right) - \lim_{x\to 1} x\cdot ln\left(\lim_{x\to 1} x\right) + \frac{1}{ln\left(\lim\limits_{x\to 1}(2x)\right)} =$$

$$= ln(2) - 1\cdot ln(1) + \frac{1}{ln(2)} = ln(2) + \frac{1}{ln(2)} \approx 0.69 + \frac{1}{0.69} \approx 2.14.$$

**Nota:** En cálculo integral también se define la función logaritmo natural en términos de los conceptos de área e integral definida tal como se muestra en la gráfica de la derecha.




## ***ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE:***

**Act-162)** Usando una calculadora, calcula las siguientes expresiones:

a) $log_{16}(8) + log_3(5)\cdot log_5(81)$

b) $log_3(8) - log_7(135) - 5e^{10}$

c) $35 + e^{2ln(\pi)} - ln(e^e) - log_{12}(65)$

d) $log_6(37) - (log_7(85))(log_4(123))$

**Act-163)** Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $log_3(x) = 3.2$ b) $log_5(x) = 2.7$ c) $ln(2-x) = 4$ d) $log_x(3) = 1.5$

e) $2ln(2+x) - ln(x) = ln(2)$ f) $4^x = 3$ g) $ln(2x^2+17x) = ln(5) \cdot log_5(9)$

h) $log_x(81) = 4$ i) $log_3(x+1) = -1$ j) $log_{\frac{1}{2}}(4) = x-1$ k) $3^{x-2} = 9$

l) $e^{x-2} = 9$ m) $log_2(x) + log_2(x-4) = log_2(x+24)$

n) $log_5(x+18) + log_5(x-6) = 2log_5(x)$ ñ) $2ln(x+2) = 3ln(4)$ o) $ln(ln(x)) = 1$

p) $4^{x-3} = \dfrac{1}{2x}$ q) $xln(4) = 6 - xln(25)$

**Act-164)** Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2^{2(x+y)} = 2 \\ 2^{4x-6y} = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} log_2(x) - log_2(y) = 1 \\ 2^{\frac{x}{2}+y} = 32 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 404 \\ ln(x) - ln(y) = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2^{7x-5y} = 8 \\ 2^{2x+27} = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 9^{2x-5y} = 27 \\ ln(x+1) - ln(y+3) = ln(x^2-1) \end{cases}$ f) $\begin{cases} log_2(2x-3y) - log_2(y) = 1 \\ 2^{x-y} - 8 = 0 \end{cases}$

**Act-165)** Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3}{x}}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^2$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{2x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$

e) $\lim\limits_{x\to 3}\ln(x)$ f) $\lim\limits_{x\to 1.5}e^x$ g) $\lim\limits_{x\to 2}(e^x + x)$ h) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left(e^{x^3-x} - ln(x^2+1)\right)$

**Act-166)** Grafica y Analiza las funciones siguientes:

a) $f(x) = e^{3x} + 1$ b) $f(x) = e^{2x} - 3$ c) $f(x) = e^{-x}$ d) $f(x) = 3e^{x-2} + 5$

e) $f(x) = ln(x-2)$ f) $f(x) = ln(x+3)$ g) $f(x) = ln(x+4) + 1$ h) $f(x) = ln(2x) - 5$

**Act-167)** El crecimiento de una colonia de mosquitos sigue un crecimiento exponencial que puede ser modelado con la siguiente función $P(t)=A_0e^{kt}$. Si inicialmente había 1200 mosquitos y después de un día la población de éstos aumenta a 2300; ¿Cuántos mosquitos habrá en la colonia después de 5 días? ¿Cuánto tiempo tendría que pasar para que la colonia tenga 20000 mosquitos?

**Act-168)** El crecimiento de una colonia de abejas está determinado por la siguiente función $P(t)=\dfrac{600}{1+49e^{-0.37t}}$. ¿Cuántas abejas había inicialmente? ¿Cuánto tiempo tomará a las abejas tener una población igual a 1000? ¿Cuál será la población de las abejas cuando $t\to\infty$?

**Act-169)** Datos experimentales han mostrado que el crecimiento en los niños entre las edades de 2-16 años puede ser aproximado por medio de la función $E(x)=18.6\,In\,x+37.1$ donde $E$ es el por ciento de la estatura de un adulto y $x$ es la edad del niño en años.

(a) Grafica la función.
(b) ¿Qué por ciento de su estatura de adulto tendrá un niño a la edad de 6 años?
(c) ¿Qué por ciento de su estatura de adulto tendrá un niño a la edad de 14 años?
(d) Si un niño tiene una estatura de 70 cm cuando tiene 2 años, ¿cuán alta podríamos esperar que fuera su estatura al llegar a la adultez?
(e) ¿Qué factores ocasionarían que este modelo de crecimiento humano sea impreciso?

**Act-170)** La acidez del agua se mide con una unidad conocida como $pH$ (Potencial de hidrógeno) y se determina mediante la expresión matemática $pH=-\log[H]$, donde $[H]$es la concentración de iones de hidrogeno en el agua. Mientras mayor es el $pH$, menor es la acidez. Mientras menor es el $pH$, mayor es la acidez.

(a) Si el $pH$ del agua (neutra) es $7.0$, ¿cuál es su concentración de iones de hidrógeno?
(b) Una muestra de lluvia ácida tiene una concentración de iones de hidrógeno de $[H]=3\times10^{-5}$. ¿Cuál es su $pH$?
(c) El $pH$ ideal para una piscina es $7.6$. ¿Cuál es su concentración ideal de iones de hidrógeno?
(d) El agua salada tiene una concentración de iones de hidrógeno de aproximadamente $[H]=10^{-9}$. ¿Cuál es su $pH$? ¿Quiere decir esto que el agua es ácida o no?

**Act-171)** Realiza una investigación, en el Internet, sobre la utilidad de las funciones en la modelación y resolución de problemas matemáticos y extramatemáticos. Y entrégale un reporte escrito de al menos 3 cuartillas a tu maestro o maestra. Además, coméntalo con tus compañeros en la clase de Cálculo I.

UNIDAD DE APRENDIZAJE II

# RAZÓN DE CAMBIO Y CONCEPTO DE DERIVADA

**Competencia de unidad:** Aplica de manera crítica y reflexiva las razones de cambio para conceptualizar y calcular la derivada de una función y en la formulación y resolución de problemas de su vida cotidiana, y de algunos campos de la ingeniería y las ciencias.

## COMPETENCIAS DISCIPLINARES QUE PROMUEVE

En esta unidad de aprendizaje se contribuye de manera directa a desarrollar las siguientes competencias disciplinares del área de matemáticas:

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos y operaciones aritméticas, algebraicas y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

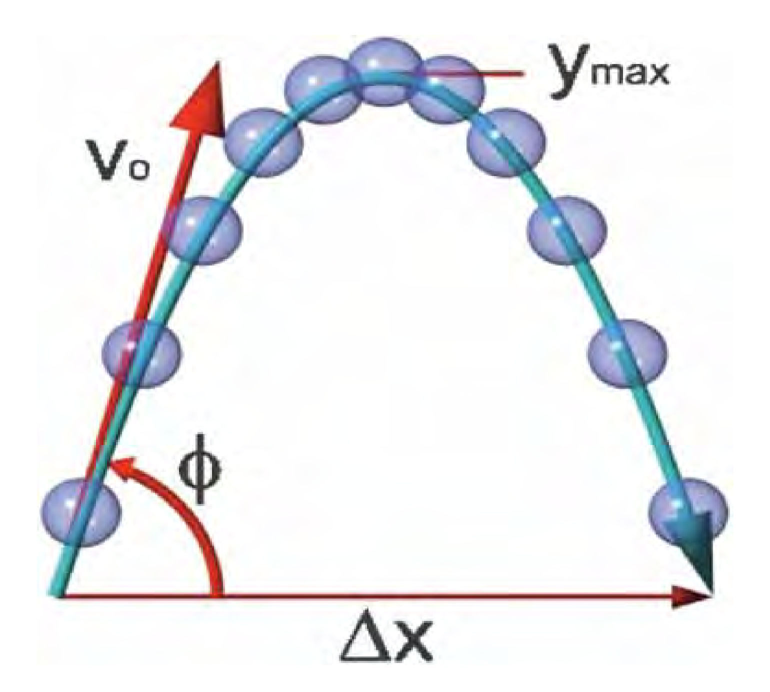
# CONTENIDO TEMÁTICO:

**2.1. Introducción.**

**2.2. Variación y razones promedio de cambio:** Concepto y cuantificación de la variación y razón de cambio. Razón promedio de cambio. velocidad promedio.

**2.3. Razones instantánea de cambio, pendientes y velocidad:** Razón instantánea de cambio. La pendiente de una curva como razón instantánea de cambio. Velocidad instantánea.

**2.4. Concepto y definición de derivada:** Problemas fundamentales relacionados con la derivada; pendiente y derivada de una función en un punto; velocidad (razón de cambio) y derivada de una función en un punto; rectas tangente y normal a la gráfica de una función; función derivable y continuidad; función derivada; notaciones para la derivada: cálculo de derivadas a partir de su definición.



# UNIDAD DE APRENDIZAJE II

# RAZÓN DE CAMBIO Y CONCEPTO DE DERIVADA

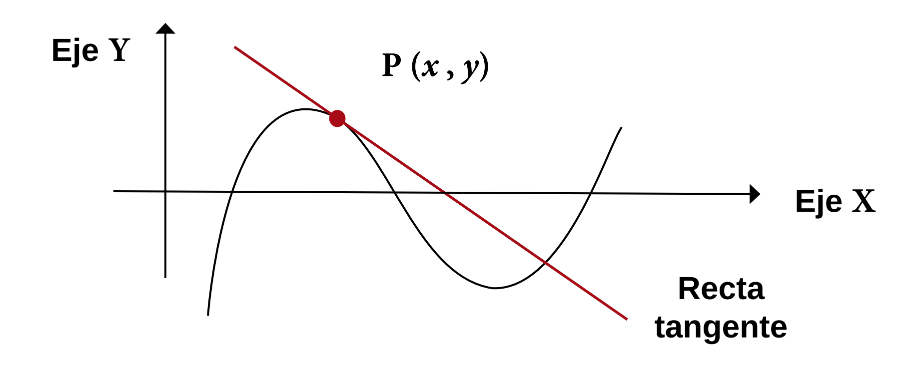
## *2.1. Introducción*

En esta unidad de aprendizaje, como una continuación de los que has aprendido en la unidad anterior sobre los problemas fundamentales del cálculo diferencial, estudiarás las **razones de cambio y el concepto de derivada** que junto con el concepto de límite son la base del **Cálculo Diferencial.**

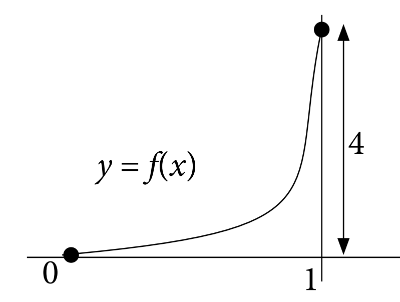
El concepto derivada, como caso particular de una razón de cambio, se relaciona con el concepto geométrico tangente para su interpretación geométrica, y con el concepto físico de velocidad instantánea para su interpretación física. Aquí es importante, para efecto de profundizar en la conceptualización, que se calculen derivadas de funciones sencillas a partir de la definición de derivada, así como de hallar ecuaciones de rectas tangentes y normales a una curva dada.

En resumen estos nuevos conocimientos están muy asociados a problemas que han sido siempre muy importantes para el hombre, como son:

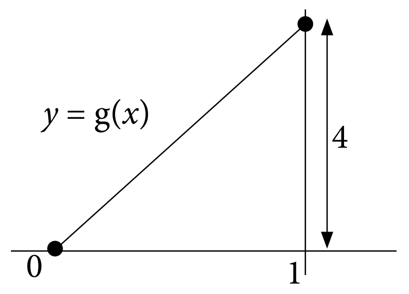
- El problema de **determinar la recta tangente a una curva** cualquiera en un punto dado $\mathrm{P}\ (x\,,y)$ de su gráfica, que es equivalente a **hallar la pendiente de dicha curva en ese punto.**



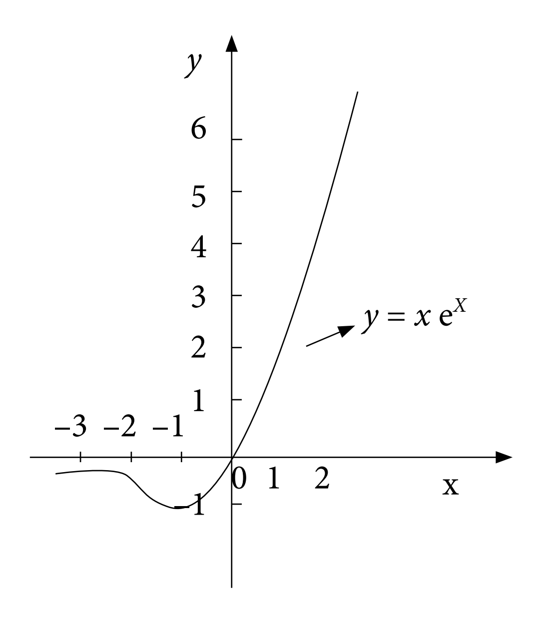
- La **forma de cuantificar la rapidez, o razón de cambio, con la que cambia una magnitud**, por ejemplo la velocidad de un móvil en kilómetros por hora.




**Ejemplo:** Las dos funciones dadas cambian lo mismo en una unidad, en este caso 4 km en 1 hora. Sin embargo, $f$ no cambia casi nada al principio y mucho al final y $g$ va cambiando de manera casi uniforme.




- La **representación de funciones** en intervalos donde no se puede afirmar si es creciente o decreciente, los posibles puntos de extremos locales o globales, los puntos donde es convexa o cóncava y donde cambia de convexidad, entre otras características importantes. Por ejemplo, conocido el gráfico de la función $y=x\,e^x$ puedes decir que parece tener un valor mínimo en $x = -1$ y que ese valor mínimo es $y = -1$. Puedes decirque no tiene un valor máximo pues la gráfica crece indefinidamente para valores positivos. Pudieras también hacer una suposición sobre los intervalos donde es decreciente y donde escreciente, entre otras propiedades. Pero, ¿qué hacer si no se conoce el gráfico?




Como ya mencionamos en la unidad de aprendizaje 1, algunos elementos históricos en la búsqueda de solución a estos problemas se encuentran en el **período histórico de las matemáticas de las magnitudes variables** alrededor del siglo XVI. Que es cuando comienzan a **modelarse matemáticamente el movimiento y los fenómenos de variación y cambio.**

Sin embargo, el extraordinario avance registrado por la matemática, en los siglos XVII y XVIII, considerado el período de oro de la matemática, se lo debemos al denominado **cálculo infinitesimal**, inventado en forma casi simultánea por el físico-matemático inglés **Isaac Newton** (Inglaterra, 1643-1727) y el filósofo-matemático alemán **Gottfried Wilhelm Leibniz** (Alemania, 1646-1716) lo que generó una gran disputa entre estos dos geniales científicos del siglo XVII.



Isaac Newton



G.W. Leibniz

Entre los conceptos fundamentales del denominado cálculo infinitesimal se encuentran el de **límite de funciones**, que acabas de estudiar en la unidad de aprendizaje anterior y los de **derivada e integral de una función** que estudiarás en esta y las siguientes unidades de Cálculo I y durante el curso de Cálculo II respectivamente.

En realidad, el invento del cálculo infinitesimal por estos dos sabios, se produjo de forma independiente y casi simultánea, pero el mismo provocó una larga controversia sobre la prioridad del descubrimiento que se prolongó durante todo el siglo XVIII y que, siendo consecuentes con la historia, tuvieron **antecedentes importantes** desde antes de nuestra era, y durante el siglo XVI y el propio siglo XVII.

En nuestra era estos antecedentes se vieron en el trabajo del abogado francés **Pierre de Fermat** (1601-1665) y del inglés **Isaac Barrow** (1630-1671), teólogo y matemático inglés cuyos métodos matemáticos eran muy próximos a los del cálculo y quien fuera el maestro de Newton. Fermat anticipó el cálculo diferencial con su método de búsqueda de los máximos y mínimos de las líneas curvas. En el caso de Barrow, se le considera el inventor de la derivada y uno de los que anticipó las relaciones entre las derivadas y las integrales como verás en el Cálculo II.

La contribución de Leibniz a las matemáticas consistió en enumerar en 1675 los principios fundamentales del cálculo infinitesimal. Esta explicación se produjo con independencia de los descubrimientos del científico inglés Isaac Newton, cuyo sistema de cálculo fue inventado en 1666. El sistema de Leibniz fue publicado en 1684, el de Newton en 1687, y el método de notación ideado por Leibniz fue adoptado universalmente.

En este capítulo trabajarás con los conceptos de variación, razón de cambio y de derivada, y los símbolos $\Delta x$, $\Delta y$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\mathbf{d}x$, $\mathbf{d}y$ y $\mathbf{d}y/\mathbf{d}x$, que se utilizan en el trabajo con ellas. Estos símbolos fueron introducidos por Leibniz y los símbolos $f'(x)$, $f''(x)$, también para las derivadas, que fueron introducidos por el matemático y astrónomo francés **Joseph Louis Lagrange**, nacido en Turín (Italia), en 1797. Lagrange, además, empleó por primera vez el nombre de **derivada**.



## 2.2. Variación y razones promedio de cambio

Hay muchas situaciones, dentro y fuera de las matemáticas, en que necesitamos estimar una ***diferencia (incremento) o un cociente (o razón),*** como en el cálculo de la variación de las variables de una relación o de una función matemática, o simplemente, al calcular la pendiente de una curva o la velocidad promedio o instantánea de un cuerpo en movimiento.

**Ejemplo 1:** la temperatura de un lugar o región regularmente cambia o varía con el transcurso del tiempo, por lo que la consideramos, al igual que el tiempo, una magnitud física variable. Así, en la siguiente tabla se muestra el pronóstico de las variaciones de la temperatura máxima y mínima en la ciudad de Culiacán durante seis días consecutivos del mes de noviembre de 2007.

| Martes 13 noviembre | | Miercoles 14 noviembre | | Jueves 15 noviembre | | Viernes 16 noviembre | | Sábado 17 noviembre | | Domingo 18 noviembre | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Soleado | | Soleado | | Soleado | | Soleado | | Soleado | | Soleado | |
| Máx | Mín | Máx | Mín | Máx | Mín | Máx | Mín | Máx | Mín | Máx | Mín |
| 33° c | 18°c | 33° c | 18°c | 32° c | 19°c | 34° c | 18°c | 34° c | 18°c | 37° c | 20°c |

FUENTE: DEBATE DEL 15 DE NOVIEMBRE DEL 2007

Con esta información, y considerando que el ***cambio o la variación de temperatura*** en un día de los mostrados en la tabla viene dada por la expresión $\Delta t = t_{max} - t_{min}$, y que, además, el pronóstico se cumplió, contesta las siguientes preguntas:

¿Qué día fue el más caluroso?____________________________________

¿Qué días fueron los más fríos?___________________________________

¿Qué día tuvo la mayor variación de temperatura?______________________

¿Qué día tuvo la menor variación de temperatura?______________________

¿Qué día tuvo el clima más agradable?______________________________

¿Cuál fue la temperatura exacta a las 12 horas del día viernes 16 de noviembre?

________________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

**Ejemplo 2:** Cuando el precio de venta de un libro es \$100 se venden al mes 60 libros. Al aumentar el precio a \$110 se venden al mes 40 libros. ¿Cuál es la razón de cambio promedio de las ventas mensuales con respecto al precio?

**Resolución:** Sea "$p$" el precio de venta, y "$n(p)$" los libros vendidos al mes. Entonces la razón promedio es:

$$\Delta p = (110)-(100) = 10 \text{ y } \Delta n = (40)-(60) = -20 \Rightarrow \frac{\Delta n}{\Delta p} = \frac{(40)-(60)}{(110)-(100)} = \frac{-20}{10} = -2$$

En este caso, el cociente o la razón promedio $\frac{\Delta n}{\Delta p} = -2$ significa que por cada peso que se incrementó el precio, se vendieron en promedio unos 2 libros menos.

**Ejemplo 3:** A las 10 horas hay 2000 bacterias en un frasco. A las 15 horas hay 12000 bacterias. ¿Cuál es la razón de cambio promedio de la población de bacterias con respecto al tiempo?

**Resolución:** Sea "$t$" el tiempo en horas, y "$p(t)$" la población de bacterias en ese tiempo, entonces.

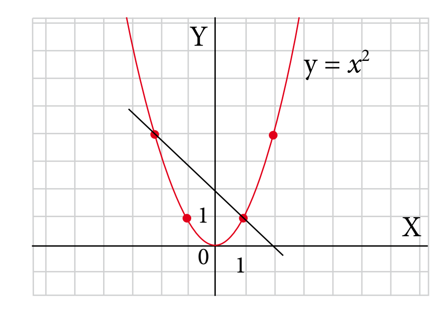
$$\Delta t = (15)-(10) = 5 \text{ y } \Delta p = (12000)-(2000) = 10000$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{(12000)-(2000)}{(15)-(10)} = \frac{10000}{5} = 2000$$

En este caso, el cociente o la razón promedio $\frac{\Delta p}{\Delta t} = 2000$ significa que por cada hora que paso el tiempo, la población creció en promedio unas 2000 bacterias. ¿Cuántas bacterias había entonces en promedio a las 12 y 14 horas?

**Ejemplo 4:** Calcular la pendiente de la recta secante que cruza a la gráfica de la función cuadrática $y=x^2$ en los puntos P(1,1) y Q $(x,y)$.

**Resolución:** La pendiente está determinada por la siguiente razón de cambio promedio de "$y$" con respecto a "$x$":




$$\Delta x = x - 1 \Rightarrow \Delta y = x^2 - 1$$

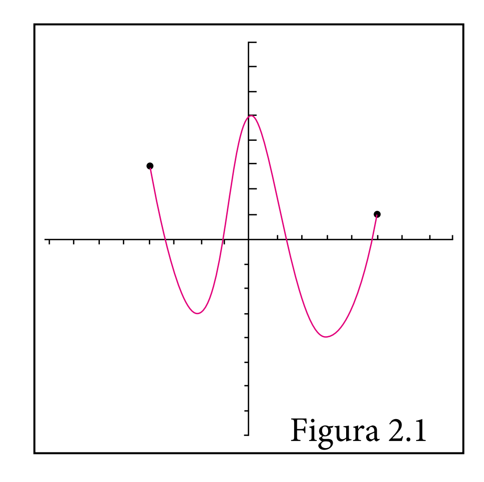
$$\Rightarrow m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

**Ejemplo 5:** Un automóvil se encuentra a 20 Km. de una ciudad cuando son las 7:00 A.M. A las 9:30 A.M. se encuentra a 220 Km. de la misma ciudad. ¿Cuál es la razón de cambio promedio de su distancia a la ciudad con respecto al tiempo, o su velocidad promedio del recorrido?

**Resolución:** Sea "$t$" el tiempo en horas, y "$s(t)$" la distancia a la ciudad en kilómetros, entonces:

$$\Delta t = 9.5 - 7 \text{ y } \Delta s = 220 - 20 \Rightarrow \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{220-20}{9.5-7} = \frac{200}{2.5} = 80\ km/hr$$

Donde el cociente o la razón promedio $\frac{\Delta s}{\Delta t} = 80\ km/hr$ significa que por cada hora que paso el tiempo, el automóvil avanzo en promedio 80 kilómetros. ¿A qué distancia estaba de la ciudad el automóvil exactamente a las 8:00 A.M.? y ¿Hubo variación del velocímetro del automóvil durante el tiempo de su movimiento?


Figura 2.1

**Ejemplo 6:** En figura 2.1 se muestra la gráfica de una función en la cual se puede observar que:

a) Cuando la variable independiente $x$ cambia de -4 a -1 , la variable dependiente $y$ cambia de 3 a 0 unidades, o sea:

$$\Delta x = (-1)-(-4)=3 \quad \Rightarrow \Delta y = (0)-(3)= -3$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(0)-(3)}{(-1)-(-4)} = \frac{-3}{3} = -1$$

b) Cuando la variable independiente $x$ cambia de -1 a 0 , la variable dependiente $y$ cambia de 0 a 5 unidades, o sea:

$$\Delta x = (0)-(-1)= 1 \quad \Rightarrow \Delta y = (5)-(0)= 5 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(5)-(0)}{(0)-(-1)} = \frac{5}{1} = 5$$

c) Cuando la variable independiente $x$ cambia de 3 a 5 , la variable dependiente $y$ cambia de -4 a 0 unidades, o sea:

$$\Delta x = (5)-(3)= 2 \quad \Rightarrow \Delta y = (0)-(-4)= 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(0)-(-4)}{(5)-(3)} = \frac{4}{2} = 2$$

**Resumiendo:** Se llama razón promedio de cambio de una función $y= f(x)$ en un intervalo $[a,b]$ al cociente de la variación de las ordenadas de los puntos extremos del intervalo, entre la variación de sus abscisas, o sea es la razón del incremento de la $y$ con respecto al incremento de la $x$. A esa razón la vamos a denominar $m$.

**Ejemplo 7:** Determinar la razón promedio de una función $f$ (Ver figura 2.2), a la que se le ha trazado un segmento con extremos en dos puntos de su gráfica de abscisas en el intervalo $[a,b]$. Dichos puntos tienen coordenadas $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ respectivamente.

**Resolución:** La razón de cambio $m$ que representa el incremento del valor de $y$ $(\Delta y)$ con respecto al incremento de la variable independiente $x$ $(\Delta x)$ es:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Observen que esta razón es exactamente la **pendiente** de la recta que contiene al segmento de recta secante a la curva, o sea al segmento de extremos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

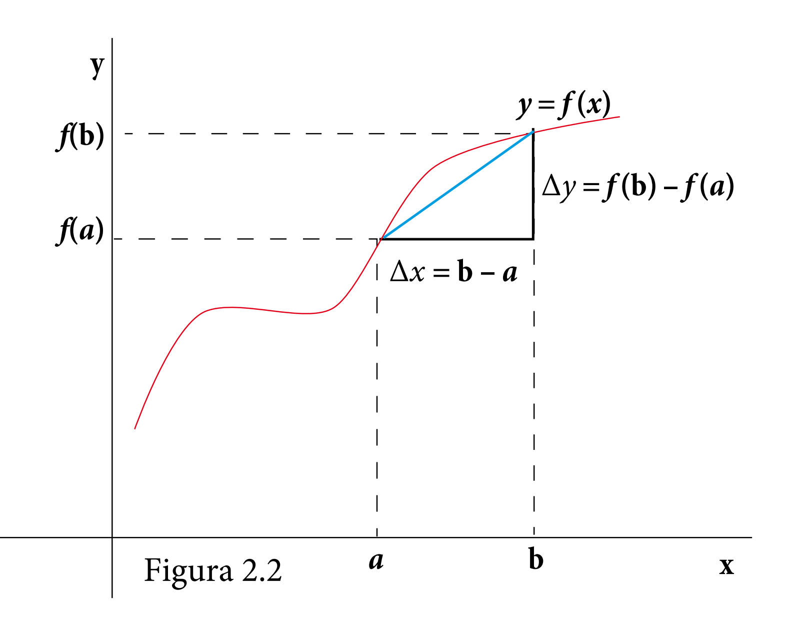


Figura 2.2

**Ejemplo 8:** Dada la función $f(x) = 4x - x^2$, determina su razón de cambio en los intervalos $[0,2]$ y $[1,3]$

**Resolución:** Observen en el gráfico de la figura 2.3 que al evaluar la función en los extremos de cada intervalo nos queda en cada caso un segmento que está contenido en una recta secante a la curva.

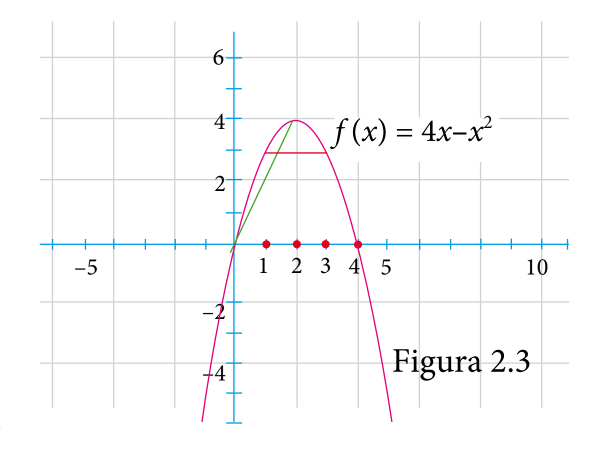


Figura 2.3

De la información que da el gráfico, o evaluando la función en los extremos de los intervalos dados, se tiene que:

- En el primer intervalo el incremento de la función $(y)$ con respecto a $x$, o sea su razón de cambio es:

$$m_1 = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{4-0}{2-0} = \frac{4}{2} = 2$$

Este valor es la pendiente de la recta que pasa por (0,0) y (2,4). En el segundo intervalo se tiene que la razón de dicho incremento es:

$$m_2 = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{3-3}{3-1} = \frac{0}{2} = 0$$

Observen en la gráfica que efectivamente en este segundo caso el segmento determinado por los extremos del intervalo es paralelo al eje X, lo que indica que la $y$ no ha crecido nada cuando la $x$ ha variado. Su razón de cambio es $m = 0$ y coincide con el valor de la pendiente de una recta paralela al eje X.

***ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE:***

**Act-1)** En la vida cotidiana existen una gran cantidad de magnitudes variables, tal como se ilustra en la siguiente gráfica donde se muestra el número de viajeros en una línea de autobuses dependiendo, o en función, de las horas de un día:

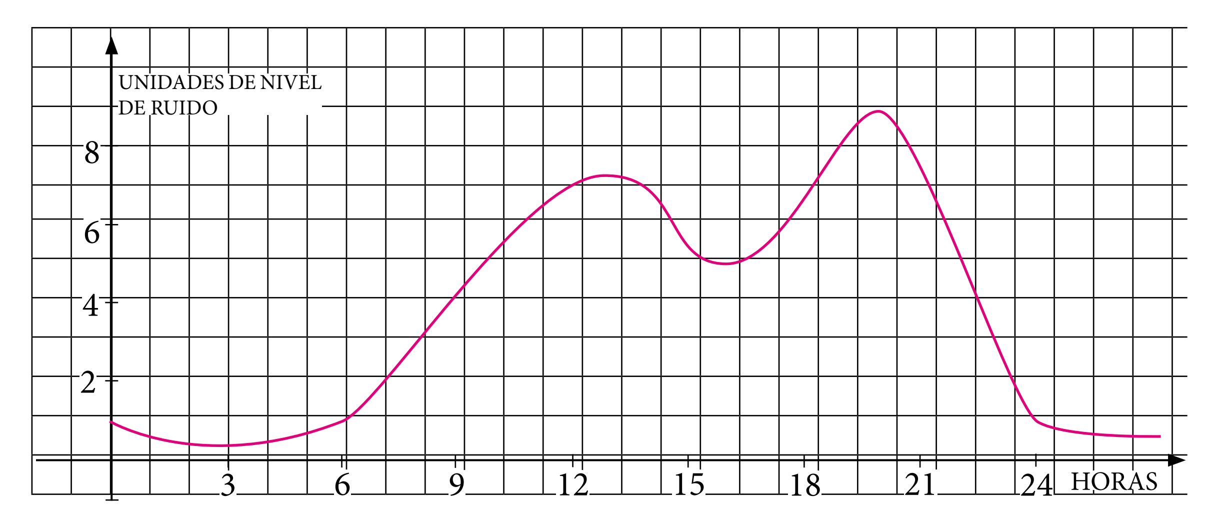



Con la información presentada en esta gráfica contesta las siguientes preguntas:

¿Cuántos viajeros había a las 8 y 16 horas respectivamente?
¿Qué representan las coordenadas del punto P (10 , 50)?
¿Si $x$ representa al tiempo, cuál es el valor d e la variable $x$ en el punto A ($x$ , 60)?
¿Si y representa al número de personas, cuál es el valor de la variable y en el punto B (13 , $y$)?
¿En qué intervalos de tiempo aumentó el número de viajeros y de cuánto fue el aumento?
¿En qué intervalos de tiempo el crecimiento del número de viajeros es igual?
¿Cómo es el crecimiento de la función entre las 6 y las 7 con respecto al que hay entre las 7 y las 8?
¿En qué intervalos la función es decreciente y en cuáles es creciente?
¿En qué intervalo no hay variación en el número de viajeros? ¿Cómo dirías que es la

función en este intervalo?
¿En qué momento hubo un número máximo de viajeros?
¿En qué momento hubo un número mínimo de viajeros?
¿Cuál es el valor de la variación media del número de viajeros durante los siguientes intervalos de tiempo $[6, 7]$, $[7, 8]$, $[8, 9]$, $[9, 12]$, $[12, 14]$, $[14, 16]$ y $[16, 18]$ ?
¿Cuál es el valor de la pendiente de los segmentos de recta correspondientes a los siguientes intervalos de tiempo $[6, 7]$, $[7, 8]$, $[8, 9]$, $[9, 12]$, $[12, 14]$, $[14, 16]$ y $[16,18]$ ?

**Act-2)** En la siguiente gráfica se muestra la relación entre el nivel de ruido que se produce en un cruce de grandes avenidas de una ciudad con las diversas horas durante un día.




Con la información de esta gráfica responde las siguientes interrogantes:

¿Cuál fue el nivel de ruido en las horas 0, 6, 12, 18, 22, 22.5, 23 y 24?
¿Cuál fue el nivel de ruido en las horas 3, 13, 16 y 20?
¿Qué representa el punto $P(16, 5)$?
¿Mediante qué punto representarías el nivel de ruido a las 12 horas?
¿Cuándo crece el nivel de ruido?
¿Cuándo decrece el nivel de ruido?
¿En qué intervalo de tiempo el nivel de ruido crece más rápidamente?
¿En qué intervalo de tiempo el nivel de ruido crece más lentamente?
¿En qué intervalo de tiempo el nivel de ruido decrece más rápidamente?
¿En qué intervalo de tiempo el nivel de ruido decrece más lentamente?
¿En qué intervalo de tiempo el nivel de ruido permanece constante?
¿En qué instantes de tiempo la intensidad del ruido es máxima?
¿En qué instantes de tiempo la intensidad del ruido es mínima?

**Act-3)** Un automóvil se encuentra a 300 Km. de Culiacán cuando son las 6:00 A.M. A las 10:15 A.M. se encuentra a 10 Km. de la misma ciudad. ¿Calcula e interpreta la razón de cambio promedio de su distancia a la ciudad con respecto al tiempo, o su velocidad promedio del recorrido?

**Act-4)** En el año 2000 la población de una ciudad era de 10000 habitantes. En el 2011 la población de esa misma ciudad fue de 17 500 personas. ¿Cuál fue la razón de cambio promedio de la población de esa ciudad durante ese tiempo?

**Act-5)** Calcula el incremento o variación de las variables dependiente e independiente, así como la razón de cambio promedio, de las siguientes funciones:

a) $y = x^3+1$ cuando $x$ pasa de $x_0 = 0$ a $x = 0.1$
b) $y = x^2-1$ cuando $x$ pasa de $x_0 = 1$ a $x = 1.2$
c) $y = 1-2x^2$ cuando $x$ pasa de $x_0 = 0$ a $x = 0.2$
d) $y = 3$ cuando $x$ pasa de $x_0 = 3$ a $x = 3.1$

**Act-6)** Calcula e interpreta geométricamente la pendiente de la recta que pasa por los puntos:

a) A (5 , 2) y B (-2 , 10).
b) C (-1 , -3) y D (4 , 6).
c) C (2 , 7) y D (-3 , 7).
d) C (-4 , 9) y D (-4 , 5).
e) P (1 , 1) y Q ($x$ , $y$).

**Act-7)** Calcula la pendiente de la recta secante que cruza a la gráfica de la función cuadrática $y = 3x^2$ en los puntos P(2,12) y Q ($x$, y).

**Act-8)** Has una estimación o pronóstico del valor de la pendiente de la recta secante que cruza a la gráfica de la función cuadrática $y = 3x^2$ en los puntos P(2,12) y Q ($x$, $y$), cuando dichos puntos están cada vez más próximos entre sí.

**Act-9)** Calcula el incremento $\Delta y$ y la razón promedio $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para las funciones:

a) $y = x^2 + 1$ cuando $x_0 = 1$ y $\Delta x = 0.1$

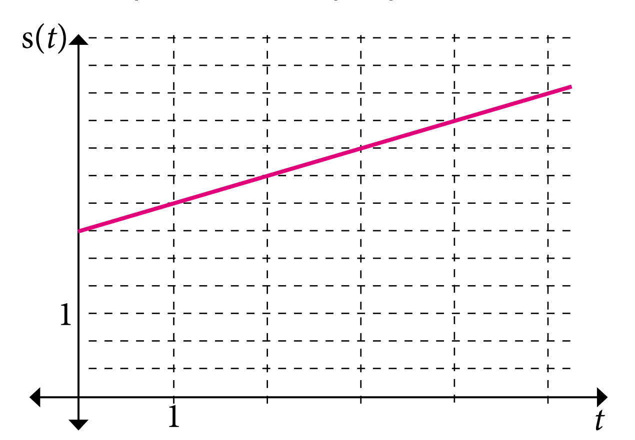
b) $y = \frac{1}{(x^2-2)^2}$ cuando $x_0 = 1$ y $\Delta x = 0.4$

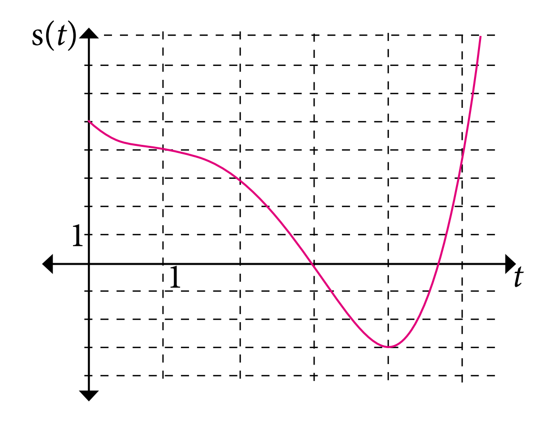
c) $y = \sqrt{x}$ cuando $x_0 = 0$ y $\Delta x = 0.0001$

d) $y = -5x + 2$ cuando $x_0 = 10$ y $\Delta x = -9$

**Act-10)** Calcula $\Delta y$ para $y = 2x+3$, cuando $\Delta x = 5$. ¿Podría plantearse un ejercicio similar para la función $y = x^2$? ¿Por qué?

**Act-11)** Las siguientes dos gráficas muestran el espacio recorrido s($t$) por dos partículas respecto del tiempo que tardan en recorrerlo.




a) Para cada partícula completa la siguiente tabla:

| Intervalos de tiempo | Partículas 1: $\Delta s$ | Partícula 2: $\Delta s$ | Partículas 1: $\Delta s/\Delta t$ | Partícula 2: $\Delta s/\Delta t$ |
|---|---|---|---|---|
| $0 \leq t \leq 1$ | | | | |
| $1 \leq t \leq 2$ | | | | |
| $2 \leq t \leq 3$ | | | | |
| $2.5 \leq t \leq 3$ | | | | |
| $3 \leq t \leq 4$ | | | | |
| $3.5 \leq t \leq 4$ | | | | |

b) En que intervalos los cambios fueron más rápidos para ambas partículas.

c) ¿Cuál fue la velocidad promedio de ambas partículas en el intervalo $2 \leq t \leq 3$.

d) ¿Cuál fue la velocidad instantánea de ambas partículas en $t = 1$ y $t = 4$.

## *2.3. Variación y razones instantáneas de cambio*

Existen problemas de variación que requieren de una razón para resolverse, sin embargo, no pueden ser resueltos con una razón promedio de cambio, y requieren de lo que se conoce como razón instantánea o puntual de cambio.

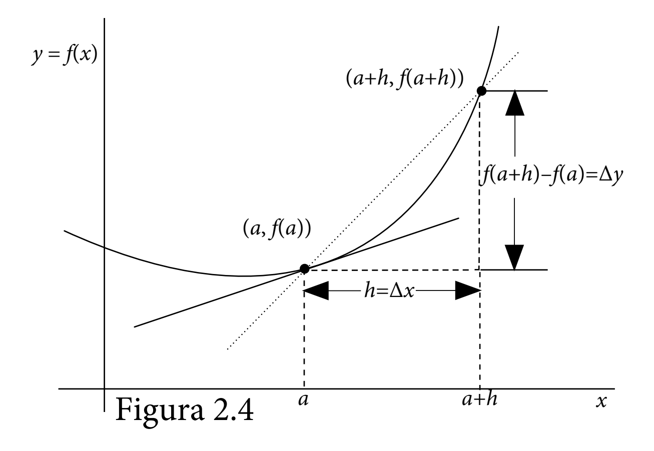


Figura 2.4

Al estudiar en la unidad de aprendizaje 1 los problemas fundamentales que resuelve el Cálculo Diferencial quedo establecido, mediante el método de Pierre de Fermat, que la

pendiente de una recta secante a una curva $y = f(x)$ que pasa por los puntos $P\ (a, f(a))$ y $P\ (a+h, f(a+h))$ de dicha curva, es una buena aproximación a la pendiente de la recta tangente de tal curva $y = f(x)$ en el punto $P\ (a, f(a))$ de su gráfica, con la condición de que el incremento $h\ (=\Delta x)$ tienda a cero $h \to 0\ (=\Delta x \to 0)$. Estás ideas están representadas geométricamente y analíticamente en la gráfica de la figura 2.4.

Además, de lo anterior se estableció que la pendiente de la recta tangente a la curva puede calcularse mediante la siguiente expresión matemática:

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} m_s = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Donde:

El símbolo $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ es un ejemplo de ***una razón instantánea de cambio,*** y representa el ***límite (o valor) de la razón promedio de cambio*** cuando el incremento $h\ (=\Delta x)$ es infinitamente pequeño, y que para fines prácticos en una etapa del proceso de cálculo se toma como igual a cero $h \to 0\ (=\Delta x \to 0)$.

Como enfatizamos también en la unidad de aprendizaje 1, si se quiere calcular la velocidad instantánea en un tiempo t de un móvil que se desplaza con velocidad variable según la función de movimiento $s = s\ (t)$, basta con hacer los cambios de variable:

$$x = t \quad ; \quad \Delta x = \Delta t \quad ; \quad f(x) = s(t)$$

Para que la velocidad instantánea del móvil quede determinada por la siguiente razón instantánea de cambio:

$$\dot{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

**Ejemplo 9:** Determina la ecuación de la recta tangente a la curva $y=x^3+1$ en el punto $P\ (-2, f\,(-2))$ de su gráfica.

**Resolución:** Primeramente se calcula la razón instantánea de cambio que determina la pendiente de la recta tangente

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} m_s = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[(x + \Delta t)^3 + 1\right] - [x^3 + 1]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[x^3 + 3x^2\,\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 1\right] - \left[x^3 + 1\right]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(3x^2 + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^2\right) = 3x^2 + 3x(\cancel{\Delta x})^{0} + (\cancel{\Delta x})^{2\,0} = 3x^2 \qquad \Rightarrow m_1 = 3(-2)^2 = 12$$

Como la ecuación de recta tangente viene dada por:

$$y - y_1 = m_1(x - x_1) \quad \Rightarrow \quad y - f(-2) = 12(x - (-2)) \quad \Rightarrow y + 7 = 12(x+2)$$

Por tanto la ecuación de la recta tangente es: $12x - y + 17 = 0$

**Ejemplo 10:** Calcula la velocidad instantanea, a los 5 y 7 segundos, de una flecha que se lanza verticalmente hacia arriba y cuya función de desplazamiento (en metros) está dada por $s(t) = 4.9t^2 + 60t$.

**Resolución:** Primeramente se calcula la razón instantánea de cambio que determina la velocidad instantánea de la flecha en cualquier punto de su trayectoria.

$$\dot{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[-4.9(t+\Delta t)^2 + 60(t+\Delta t)\right] - \left[-4.9t^2 + 60t\right]}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-9.8t\Delta t - 4.9(\Delta t)^2 + 60(\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (-9.8t - 4.9\overset{0}{\not{\Delta t}} + 60$$

$$= -9.8t + 60$$

Por tanto, las velocidades instantáneas de la flecha a los 5 y 7 segundos son respectivamente:

$$\dot{v}(5) = -9.8(5) + 60 = 11 m/seg \quad \text{y} \quad \dot{v}(7) = -9.8(7) + 60 = -8.6 m/seg$$

En general, en una función $y = f(x)$ se definen respectivamente los incrementos (o diferencias) y razón promedio e instantánea de cambio como:

$$\boxed{\Delta x = x_2 - x_1} \qquad \boxed{\Delta y = y_2 - y_1} \qquad \boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} \qquad \boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

Donde: $\boxed{x_1 \text{ y } x_2}$ son los valores inicial y final de la variable independiente después de un cambio o variación, y $\boxed{y_1 \text{ y } y_2}$ son respectivamente los valores correspondientes de la variable dependiente. En particular a $\boxed{\Delta y = y_2 - y_1}$ se le llama cambio o variación de la función.

Además, al cociente o razón promedio $\boxed{\Delta y / \Delta x}$ también se le denomina como tasa de variación media (TVM). Al cociente o razón instantánea de cambio $\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$ también se le denomina como tasa de variación instantánea (TVI).

### *La recta tangente como límite de rectas secantes*

A partir de las ideas anteriores, en la que se identifica la razón de cambio en un intervalo con **la pendiente** de una **recta $r_1$ secante a la curva en los extremos de ese intervalo** (fig.2.5), surge la idea de **Pierre de Fermat** de **"mover"** esa recta secante, dejando fijo **el punto A hasta hacerle tangente a dicho punto.**

Observen que podemos interpretarla como la recta que pasa por A y su pendiente es **el límite de las pendientes de las rectas secantes a la curva que pasan por el punto A.**

En este caso, **el límite de las pendientes** de las rectas secantes $r_1$, $r_2$, $r_3$, … $r_n$, **es la pendiente de la recta t, tangente a la curva en el punto A.**

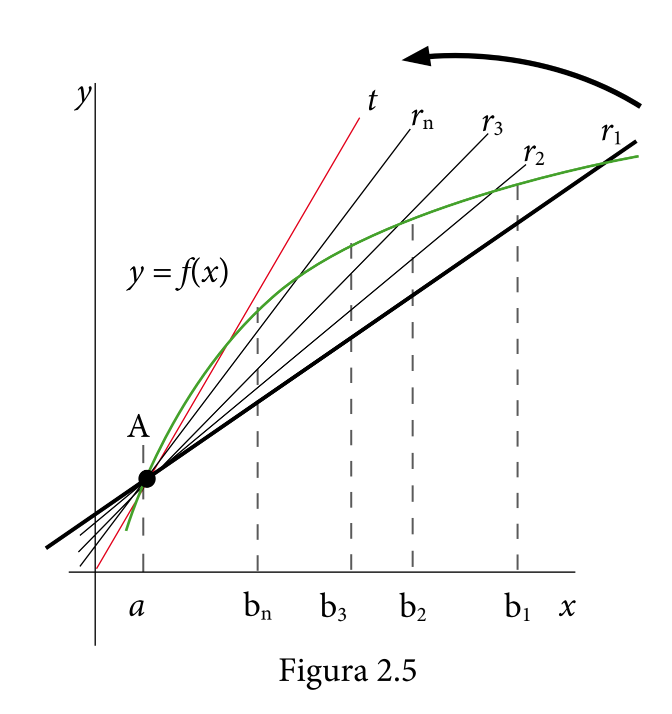



Figura 2.5

**Ejemplo 11:** Determina la pendiente y la ecuación de la recta tangente al gráfico de la parábola $y = x^2$ en el punto de abscisa $x_0 = 2$.

**Resolución:** Como ya viste la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado la hemos considerado como el límite de las pendientes de las rectas que pasan por ese punto. Así que para determinar esa pendiente consideremos una secante que pase por **P** y **Q** (**Q** puede estar a la izquierda o a la derecha de **P**, en la figura 2.6 aparece a la derecha).

Vamos a utilizar la notación

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

El punto P tiene abscisa $x_0 = 2$ y ordenada $y_0 = x_0^2 = 2^2 = 4$.

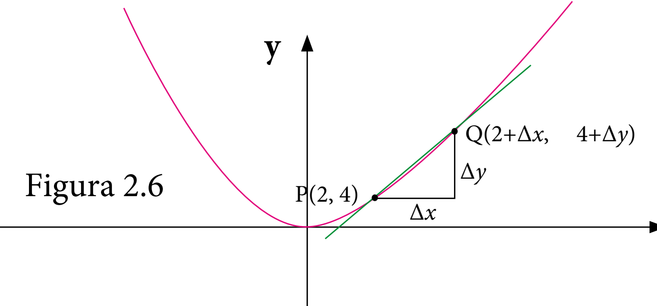



Figura 2.6

Observa que si **P** tiene coordenadas **(2 , 4)** entonces **Q** tiene coordenadas $(2+\Delta x, 4+\Delta y)$ pues el incremento de $x$ se ha denotado $\Delta x$ y el de $y$ se ha denotado por $\Delta y$. En ese caso también se tiene que como $y = 4 + \Delta y$ entonces $\Delta y = y - 4$, igualdad que vas a utilizar más adelante.

**Nota:** Como algo importante también debes tener en cuenta que el incremento lo mismo puede ser positivo que negativo.

Para determinar la pendiente de la recta tangente al gráfico de la parábola $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa $x_0 = 2$, solo resta evaluar la función en el punto dado y calcular el límite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando $\Delta x$ tiende a 0. Se tiene entonces que:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y-4}{\Delta x} = \frac{(2+\Delta x)^2 - 4}{\Delta x} = \frac{4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 4+\Delta x$$

Por tanto, la pendiente de la recta tangente es: $\lim_{\Delta x \to 0} (4+\Delta x) = 4+0=4$

Para concluir debes tener en cuenta que una manera de representar la ecuación de una recta es mediante la ecuación $\boldsymbol{y = mx + n}$ donde **m es la pendiente** y $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ representan las coordenadas de los puntos que pertenecen a ella.

En este caso se sabe que **(2 , 4)** está en esa recta pues es tangente a la parábola en ese punto, entonces sustituyendo en $\boldsymbol{y = mx + n}$ se tiene que:

$$\mathbf{4 = 4(2) +} \boldsymbol{n}$$

Despejando n se tiene que $\boldsymbol{n = 4}$ y la ecuación de la pendiente es: $\boldsymbol{y = 4x + 4}$.

Que también se puede representar por la ecuación general equivalente:

$$\boldsymbol{4x - y + 4 = 0}$$

En general, la recta tangente a la gráfica de una función en un punto es la recta que pasa por el punto con pendiente $\mathbf{m_t}$ dada por:

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

A la pendiente de la recta tangente se le llama, también, **pendiente de la curva en el punto.**

El límite que define la pendiente de la recta tangente de una curva en un punto puede no existir, en este caso se dice que no exista la tangente o que la curva no tiene pendiente en dicho punto. Ese es el caso conocido de la gráfica de la función valor absoluto: $y = |x|$ en $x = 0$ **(Ver fig. 2.7).**

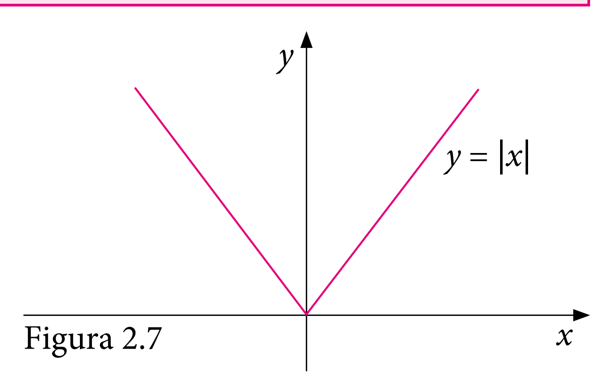


Figura 2.7

En este caso se trata del punto de abscisa $x_0=0$, para el cual la ordenada correspondiente es $y_0 = | x_0 | = | 0 | = 0$, entonces:

$$\Delta y = y - y_0 = |0 + \Delta x| - 0 = |\Delta x| \quad \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1 \text{ si } x>0 \\ -1 \text{ si } x<0 \end{cases}$$

luego **el límite no existe porque no es único.**

La variabilidad de una variable $x$, $\Delta x = x_2 - x_1$ ,o de una función $y = f(x)$, $\Delta y = y_2 - y_1$ ,sirve también para diferentes clasificaciones de la funciones. Así, tenemos que las funciones pueden ser crecientes, decrecientes, continuas, discontinuas, etc.

De esta manera se define una **función creciente** en un intervalo como aquella que cuando al aumentar la variable independiente $x$ en ese intervalo, aumenta la variable dependiente $y$. De donde se deduce que para estos casos:

$$\Delta x = x_2 - x_1 > 0 \qquad \Delta y = y_2 - y_1 > 0 \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0 \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$$

Un ejemplo de ***función creciente*** se presenta cuando una determinada bacteria se reproduce dividiéndose en dos cada segundo, ya que por el sistema de reproducción de la bacteria es obvio que a medida que pasa el tiempo hay mayor número de ellas. Es decir, en una función (estrictamente) creciente, al aumentar el valor de la variable independiente $x$, también aumenta el valor de la variable dependiente $y$.

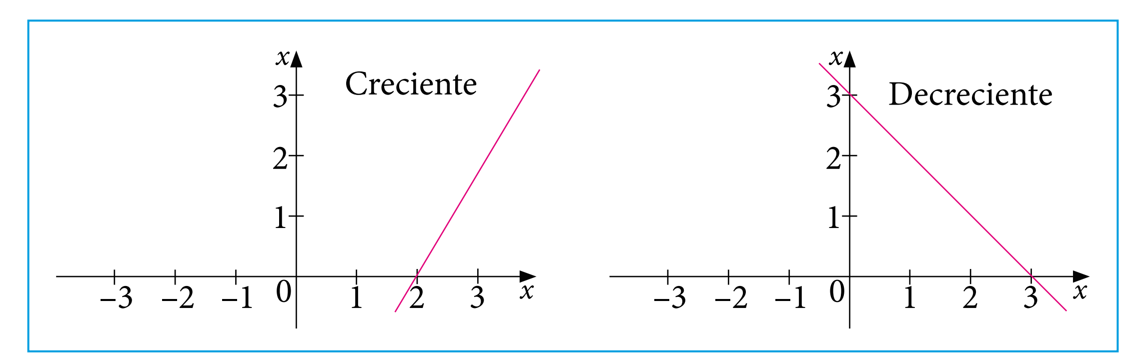
O sea: $y = f(x)$ *es estrictamente creciente si:* $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Y se define una **función decreciente** en un intervalo como aquella que cuando al aumentar la variable independiente $x$ en ese intervalo, disminuye la variable dependiente $y$. De donde se deduce que, para estos casos:

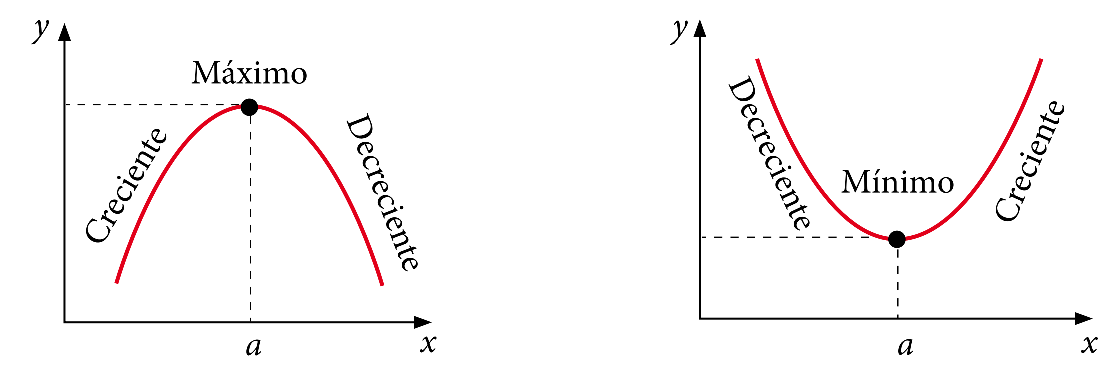
$$\Delta x = x_2 - x_1 > 0 \qquad \Delta y = y_2 - y_1 < 0 \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} < 0 \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$$

De lo anterior se concluye que la función graficada en la figura 2.1 es decreciente en los intervalos $(-4, -2)$ y $(0,3)$ y creciente en los intervalos $(-2,0)$ y $(3,5)$. Pero más importante aun es la siguiente conclusión: ***si la función es creciente en punto o intervalo, entonces la pendiente de su recta tangente en dicho punto es positiva. Y si la función es decreciente en punto o intervalo, entonces la pendiente de su recta tangente en dicho punto es negativa.***

Un ejemplo de una **función (estrictamente) decreciente**, se presenta cuando al au*mentar la altura* ($x$ = altura) por encima del nivel del mar a la que nos encontremos, *la presión atmosférica va disminuyendo ($y$ = presión)*, además no uniformemente, sino que al principio disminuye más rápidamente que después. Es decir, al aumentar el valor de la variable independiente $x$, disminuye el valor de la variable dependiente y. O sea: $y = f(x)$ es estrictamente decreciente si: $x_1 < x_2 < \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.




La mayoría de las funciones no van a ser siempre creciente o siempre decrecientes en todo su dominio. Es decir, que se presentarán como las que se muestran en las gráficas de abajo, que tiene trozos en los que su comportamiento es creciente, y trozos en los que su comportamiento es decreciente. Notar que en estas gráficas al pasar la funciónde creciente a decreciente define lo que se denomina un ***máximo relativo de la función*** *y = f(a)*, y al pasar la función de decreciente a creciente define lo que se denomina un ***mínimo relativo de la función*** $y = f(a)$.




El estudio del crecimiento y decrecimiento de una función lo haremos por intervalos del dominio, indicando en cuáles es creciente y en cuáles decreciente. A partir de la gráfica se ve claro el crecimiento y decrecimiento de una manera intuitiva, pero siempre mirándola de izquierda a derecha que es como va aumentando la variable independiente $x$. Debido precisamente a esos cambios que vemos en algunas funciones, que en determinados puntos del eje de abscisas pasan de crecer a decrecer o viceversa nos aparecen los **máximos relativos y mínimos relativos, o extremos relativos, de la función.** (Ver figura 2.8)

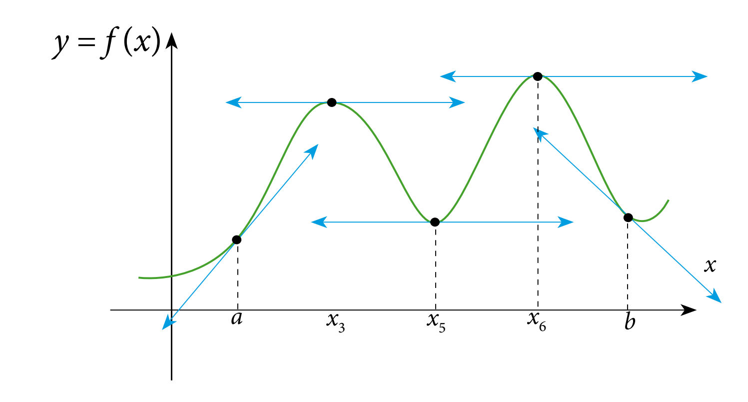
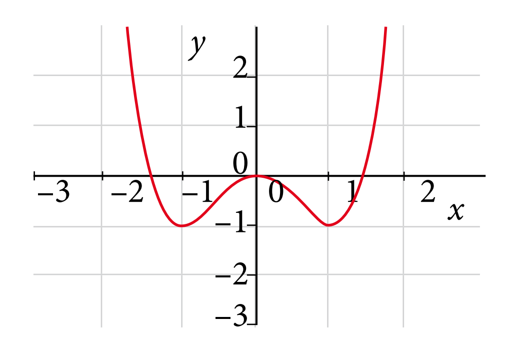



Figura 2.8

De la gráfica de la figura 2.8 se observa que la función $f$ tiene **valores máximos** relativos en los puntos de abscisas $x_3$ y $x_6$, y que en dichos puntos la función pasa de ser creciente a la izquierda a ser decreciente a la derecha. Mientras que la función $f$ tiene un **valor mínimo relativo** en el punto de abscisa $x_5$ , y la función pasa de ser decreciente a la izquierda de $x_5$ a ser creciente a la derecha de $x_5$.




Por ejemplo, en la gráfica de la izquierda se muestra como la función $y = f(x)$ tiene en $x = -1$ y $x = 1$ el mínimo relativo $y = -1$. Mientras que tiene un máximo relativo $y = 0$ en $x = 0$.

En general, una función puede tener varios extremos relativos, de entre ellos, si existe, llamaremos máximo absoluto al valor $f(x_0)$ que cumpla $f(x_0) \geq f(x)$ para cualquier $x$ del dominio, y análogamente llamaremos mínimo absoluto, si existe, al valor $f(x_0)$ que cumpla $f(x_0) \leq f(x)$ para cualquier $x$ del dominio.

***<u>ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE:</u>***

**Act-12)** Determina cuál es la pendiente de la tangente a la curva en el punto indicado.

a) $y = 2x + 3$ en $x_0 = 1$ b) $y = 2 - 3x$ en $x_0 = -1$

c) $y = \frac{1}{2}x$ en $x_0 = 2$ d) $y = mx + n$ en $x_0 = 1$

**Act-13)** ¿Qué curvas representan las funciones del ejercicio anterior? ¿Dependerá el valor de la pendiente del punto seleccionado? ¿Por qué?

**Act-14)** Calcula la pendiente de la tangente a la curva en el punto indicado.

a) $y = x^2 + 1$ en $x_0 = 0$ b) $y = |x| - 1$ en $x_0 = 0$

c) $y = -\frac{1}{3}x^2$ en $x_0 = 3$ d) $y = |x - 2|$ en $x_0 = 2$

e) $y = x^2 + 2x + 1$ en $x_0 = 1$ f) $y = x^3$ en $x_0 = 1$

**Act-15)** ¿Dependerá del punto seleccionado el valor de la pendiente de las tangentes a las curvas del ejercicio anterior? Fundamenta.

**Act-16)** De las curvas determinadas por las ecuaciones $y=5x-1$, $y=5x+3$, $y=x^2+x$, $y=\frac{1}{3}(15x+1)$ ¿cuáles tienen la misma pendiente en cualquiera de sus puntos? ¿Cuáles tienen la misma pendiente en $x_0=2$?

**Act-17)** La recta de la ecuación $y=2x+3$ es tangente al gráfico de la función $f$ en el punto $x_0=1$. ¿Cuál es el valor de la pendiente de la curva en $x_0=1$?

**Act-18)** Calcula la pendiente de la tangente en el punto $x_0=3$ de la curva representada en la figura 2.9.

**Act-19)** De la figura 2.10 calcula: (a) la pendiente en el punto $x=2$ de la curva representada ; (b) $y=f(2)$.

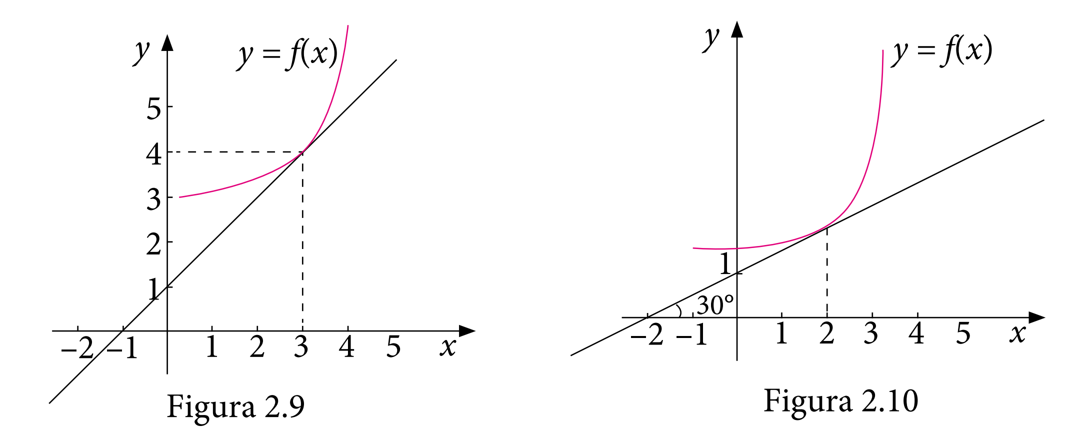



Figura 2.9

Figura 2.10

**Act-20)** Si $f(1)=3$ y la pendiente del gráfico de $f$ en $x=1$ es $2$, determina la ecuación de la tangente al gráfico de la función $f$ en el punto $x_0=1$.

**Act-21)** ¿En cuáles de los puntos representados no tiene tangente la curva de la figura 2.11?

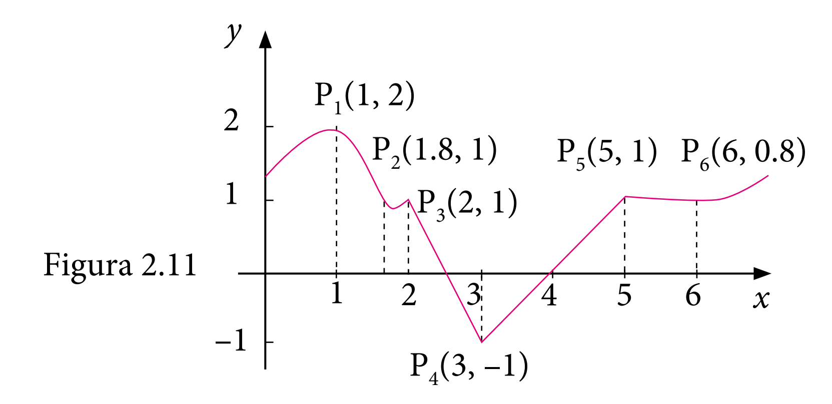


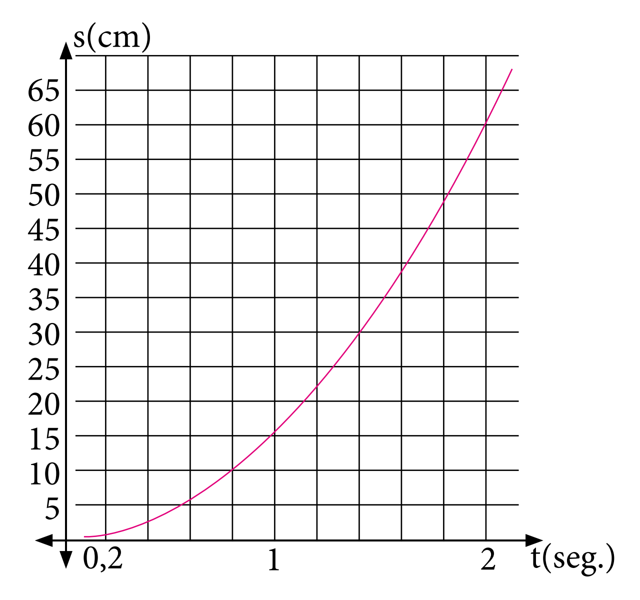

Figura 2.11

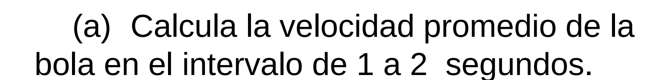
**Act-22)** Determina la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto indicado

a) $y = 4x^2$ $(-1, 4)$ b) $y = x^2 - 5x + 4$ $(1, 0)$

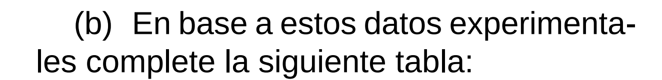
c) $y = 2x^3$ $(-1, -2)$ d) $y = 2x^3 - 4x$ $(2, y)$

**Act-23)** En un experimento de laboratorio de Física un alumno estudió la caída libre de una bola de metal pequeña. La gráfica siguiente muestra el espacio ***s*** recorrido por la bola (en centímetros) en función del tiempo t (en segundos).



(a) Calcula la velocidad promedio de la bola en el intervalo de 1 a 2 segundos.



(b) En base a estos datos experimentales complete la siguiente tabla:

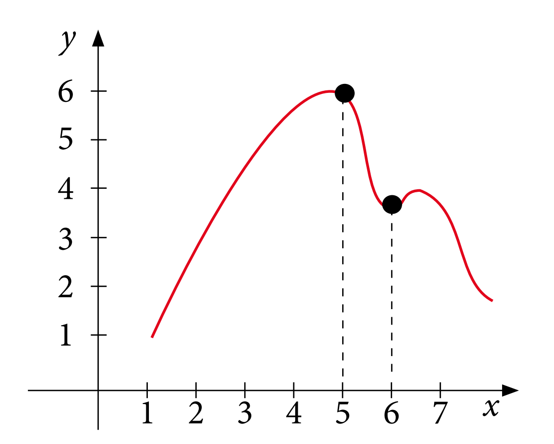
| Incremento: $\Delta t$ | $\Delta t = 0.8$ | $\Delta t = 0.6$ | $\Delta t = 0.4$ | $\Delta t = 0.2$ |
|---|---|---|---|---|
| Intervalo: $(1, 1 + \Delta t)$ | | | | |
| Espacio recorrido: $\Delta s$ | | | | |
| Velocidad promedio: $\bar{v}$ | | | | |

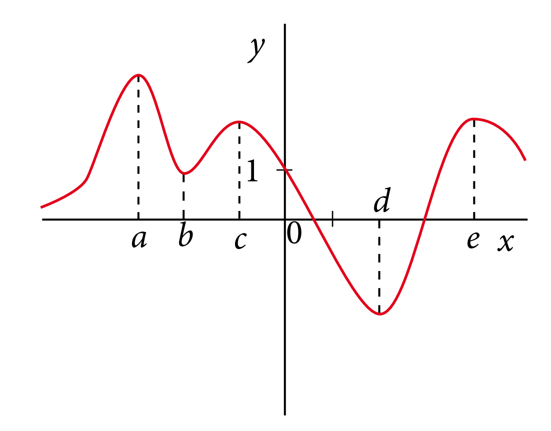
(c) Calcula la velocidad instantánea de la bola cuando $t$=1 segundo.

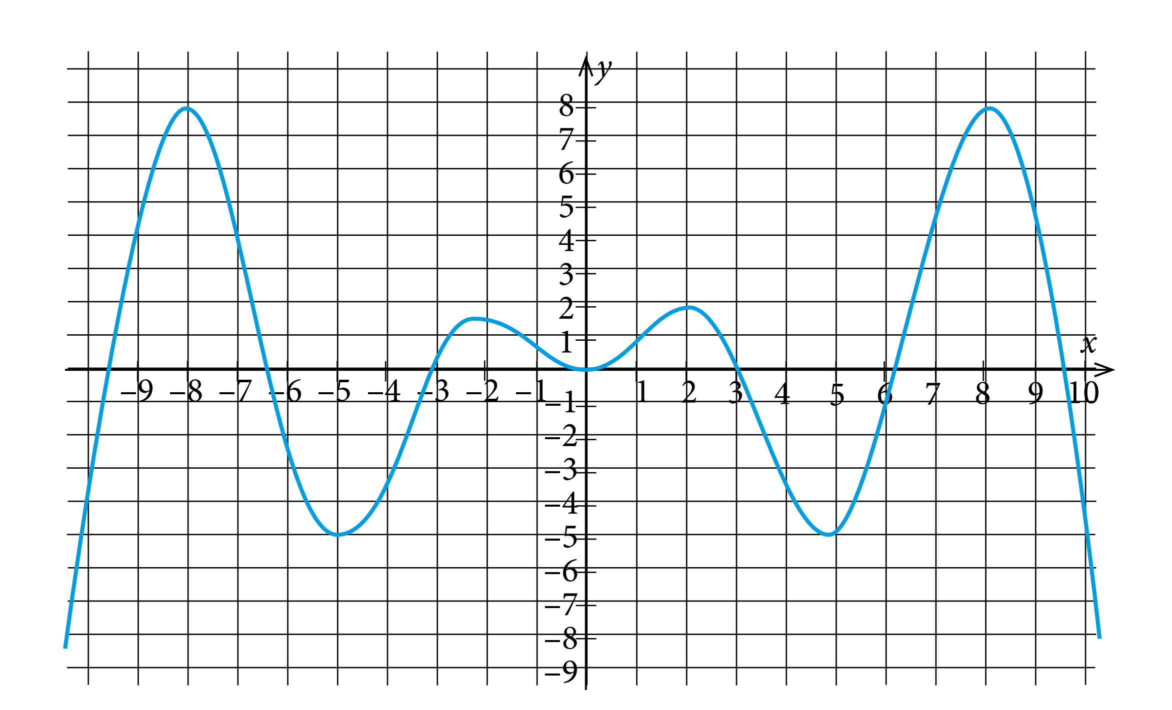
(d) Calcula la velocidad instantánea de la bola cuando $t$=0.8 segundo.

**Act-24)** Calcula la velocidad instantánea, a los 2 , 6 y 8 segundos, de una flecha que se lanza verticalmente hacia arriba y cuya función de desplazamiento (en metros) esta dada $s(t) = -4.9t^2 + 80t + 1$.

**Act.25)** Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los valores máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones:




## 2.4. *Concepto y definición de derivada*

Desde grados anteriores, la tangente a una curva la hemos considerado como **"la recta que toca a la curva en un único punto".**

Por ejemplo, en los siguientes gráficos de la figura 2.12 se ilustra una **tangente** a cada una de las curvas dadas, que en este caso es una circunferencia y una elipse respectivamente.

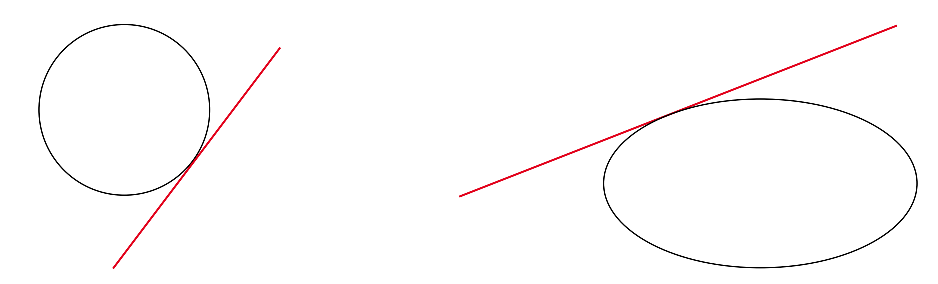


Figura 2.12

Sin embargo hay ejemplos que muestran que una recta tangente a una curva en un punto puede tocarla en otros puntos en los cuales no es tangente (fig. 2.13a), e incluso tocarla en infinitos puntos como en la figura fig. 2.13b que **el propio eje $x$ es tangente a la curva en infinitos puntos** pues hay una parte de ella que coincide con dicho eje. También puede suceder que la toque en un único punto y no sea tangente a la curva en ese punto (fig. 2.13c).

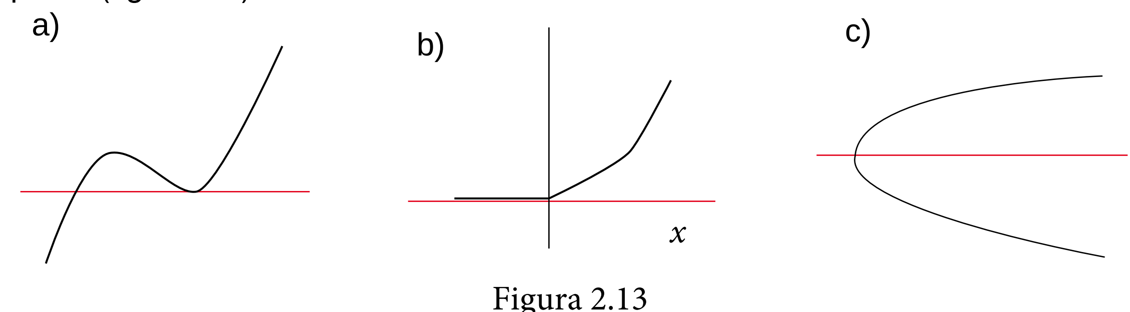



Figura 2.13

Como te habrás podido dar cuenta la **"definición tradicional de tangente"** que hasta ahora conoces no es aplicable en estos casos y hasta el momento no has estudiado ninguna definición que permita, de manera general, decir cuando una recta es tangente a una curva o al gráfico de una función dada.

De aquí resulta **el problema de definir la tangente** mediante herramientas matemáticas generales que podamos aplicar en todos los casos. Como se planteó en las referencias históricas, este es uno de los problemas que dio origen al cálculo diferencial, una de las ramas más importantes de las matemáticas. Y con lo estudiado hasta aquí ya estamos en posibilidad de darle solución al mismo.

Para llegar a la definición que buscamos y considerando la historia de su surgimiento, se partirá del caso ya analizado de una recta secante a una curva de ecuación $y = f(x)$, o sea que la corta al menos en dos puntos, y se retomara el procedimiento para medir la **variación de la función** en el intervalo determinado por los puntos de intersección. Esto significa que llegaremos al concepto de derivada considerándola como **una medida del crecimiento.**

Para estudiar el concepto de derivada debes saber que hay que diferenciar los conceptos de **derivada de una función en un punto** y del **concepto de derivada de una función** en general. Retomando pues lo que se ha considerado anteriormente, ya se tienen suficientes elementos para definir la derivada de una función en un punto. A continuación estudiarás ambos conceptos.

***Concepto y definición de derivada de una función en un punto***

Una primera consideración de qué es la **derivada de una función en un punto**, a partir de la historia, es la de asumirla como **la pendiente de la recta tangente en un punto a la curva que representa la función.** De donde:

**Se llama derivada de una función** $y = f(x)$ **en un punto** $P(x_0, f(x_0))$, y se denota por $f'(x_0)$, al límite de la razón promedio $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando $\Delta x$ tiende a 0, es decir:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

**Nota:** Cuando **una función tiene derivada en un punto** $x_0$ se dice que es **derivable en ese punto.** Es importante que tengas siempre en cuenta que **si tal límite no existe,** $f$ **no tiene derivada en el punto de abscisa** $x_0$ **considerado**, como ya viste antes en el caso de la función valor absoluto: $y = |x|$ en $x = 0$.

Otra forma de representar al anterior límite y que te puede ser útil es la siguiente. Observa en el gráfico que si le denominas $h$ al incremento de $x$ este no es más que **b—a.**

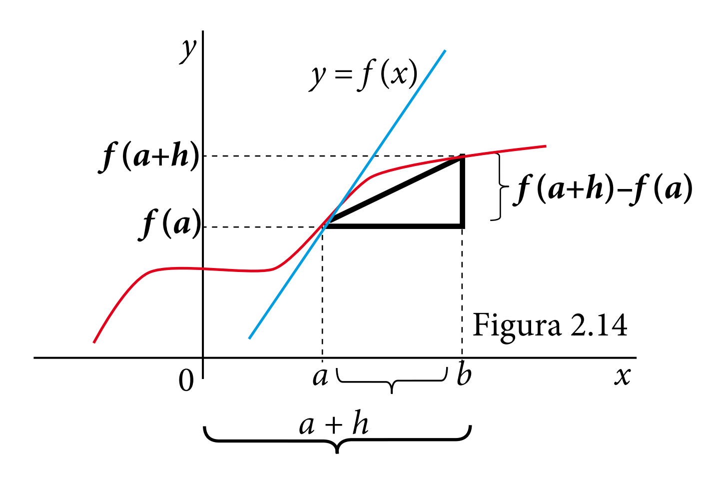


Figura 2.14

En ese caso **el incremento de y** es: $f(a+h) — f(a)$**.** Entonces se tiene que la pendiente de la recta secante es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Aplicando la definición de derivada de $f$ en el punto $P(a, f(a))$ y utilizando esta nueva notación, se tiene que **la pendiente de la recta tangente en** $x=a$ o sea **la derivada de la función en ese punto** es:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Como recordarás de las referencias históricas, esta notación de $f'$ fue introducida por el matemático y astrónomo francés **Joseph Louis Lagrange**, y el también fue el que empleó por primera vez el nombre de **derivada.**

**Ejemplo 12:** Calcula la derivada de $f(x) = x^2 + 1$ en el punto de abscisa $x_0 = 2$.

**Resolución:** Lo anterior significa que debemos calcular $f'(2)$, o sea el límite

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

donde $h$ es el incremento de la $\boldsymbol{x}$ (o sea: $h = \Delta x$).

Calculemos ordenadamente los valores de $f$ en los puntos pedidos.

$f(2+h) - f(2) = 5 + 4h + h^2 + 1 = 5 + 4h + h^2 \quad f \quad f(2) = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$

Entonces: $f(2+h) - f(2) = 5 + 4h + h^2 - 5 = 4h + h^2$

Aplicando el límite y la propiedad del límite de una suma se tiene que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4h}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 4 + \lim_{h \to 0} h = 4 + 0 = 4$$

Por tanto, la respuesta es que la derivada de $f$ en el punto de abscisa 2 es 4, o sea que $f'(2) = 4$.

**Ejemplo 13:** Verifica rápidamente que la derivada de la función $g(x) = x^2 - 3$ es la misma ya antes obtenida para $f(x) = x^2 + 1$ en el mismo punto de abscisa $x_0 = 2$.

**Resolución:**

$g(2+h) = (2+h)^2 - 3 = 4 + 4h + h^2 - 3 = 1 + 4h + h^2$ y $g(2) = 2^2 - 3 = 4 - 3 = 1$

Entonces: $g(2+h) - g(2) = 1 + 4h + h^2 - 1 = 4h + h^2$

que es el mismo valor obtenido para $f(2+h) - f(2)$ y por tanto al calcular $g'(2)$ se obtendrá de nuevo el valor 4, y eso significa que esas dos funciones tienen la misma derivada en el punto de abscisa $x_0 = 2$.

Ese resultado que se ha obtenido en el ejemplo anterior no es una casualidad, más adelante verás que hay muchas funciones que tienen la misma derivada en un punto dado.

En general para calcular la derivada de una función en un punto $P(a, f(a))$ de su curva se sigue el siguiente procedimiento conocido como ***regla de los 5 pasos:***

| **Procedimiento (regla de los 5 pasos) para el cálculo de la derivada de la función $f$ en un punto a o de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f$ en ese punto** | |
|---|---|
| Primero | Evaluar la función en $a$ y en $a+h$, o sea, calcular $f(a)$ y $f(a+h)$ |
| Segundo | Calcular la diferencia: $f(a+h)-f(a)$ |
| Tercero | Calcular el cociente: $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ y simplificarlo si es posible |
| Cuarto | Calcular el límite: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ |
| Quinto | Concluir que el límite obtenido es la derivada de $f$ en $a$, o sea, $f'(a)$ o la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y=f(x)$ en a. |

***La derivada como función***

Ya vimos como dos problemas diferentes conducen a un planteamiento matemático similar, en este caso vimos el problema de la tangente y el problema de la velocidad instántanea y de ahí se llegó al concepto de derivada de una función $f$ en un punto.

Al calcular la derivada de una función $f$ en un punto **se obtiene un valor único** y esto nos permite considerar la función que a cada punto $\boldsymbol{x}$ le hace corresponder $f'(x)$, o sea a la función $x \to f'(x)$ donde $x \in Dom\, f$.

Se llama función derivada de la función $f$ (o simplemente derivada de $f$) y se denota $f'$ a la función que a cada $x \in Dom\, f$, le asigna

$$f'(x)=\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

donde $h$ es el incremento de $f$ con respecto a $x$. **Si tal límite no existe entonces $f$ no tiene derivada en** $x$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 2x + \lim_{h\to 0} h = 2x + 0 = 2x$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = \frac{x - (x+h)}{x(x+h)} = \frac{x - x - h}{x(x+h)} = \frac{-h}{x^2 + xh}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h}{x^2 + xh}}{h} \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(x^2+xh)} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x^2 + xh} = \frac{-1}{x^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

**Otras notaciones para representar la derivada de la función** $y = f(x)$:

$y'$ ..................................... para denotar la función derivada.

$y'(x_0)$ ..................................... para denotar la derivada en $x_0$.

$\frac{df(x_0)}{dx}$ ..................................... para denotar la derivada en $x_0$.

$\frac{dy}{dx}$ ..................................... para denotar la función derivada.

$\frac{df(x)}{dx}$ ..................................... para denotar la función derivada.

***La derivada de la derivada de una función***

Puede ocurrir que la derivada de la función $f$ sea una función derivable. En tal caso a **la derivada de la derivada de $f$ se le llama segunda derivada de $f$ y se denota por $f''$.**

Análogamente, **la derivada de la segunda derivada de $f$ es la tercera derivada de $f$ que se denota por $f'''$**, y así sucesivamente.

**Ejemplo 16:** Calcula la derivada de $g(x) = f'(x) = 2x$

**Resolución:** Siguiendo el procedimiento ya antes utilizado para el cálculo de derivadas tenemos que

$$g(x+h) - g(x) = 2(x+h) - 2x + 2h - 2x = 2x + 2h - 2x = 2h$$

Luego: $g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} = \lim_{h\to 0} 2 = 2$

Observa que la derivada hallada es la segunda derivada de $f$, o sea: $f''(x) = 2$

**Ejemplo 17:** Calcula la segunda derivada de $g(x) = x^2 + 1$

**Resolución:** En este caso debemos primero calcular la primera derivada y después la derivada de ella que es la segunda derivada de la función dada. Siguiendo el procedimiento ya antes utilizado tenemos que:

$$\begin{aligned} g(x+h) - g(x) &= (x+h)^2 + 1 - (x^2+1) \\ &= x^2 + 2xh + h^2 + 1 - x^2 - 1 \\ &= 2xh + h^2 \end{aligned}$$

De donde: $g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2x + h = 2x + 0 = 2x$

Como hemos obtenido la misma función del ejemplo anterior y ya sabemos que su derivada es 2, entonces: $g''(x)=2$

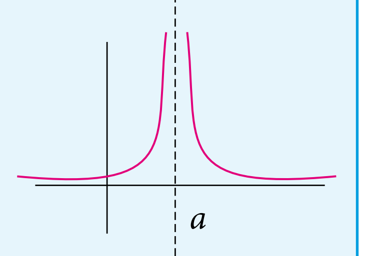
De igual modo se puede calcular sucesivamente la derivada de la derivada y se habla entonces de **derivadas sucesivas.**

Sobre este concepto de derivada de una función en un punto hay otras cosas que también debes tener en cuenta, aunque no las formalizaremos en este curso, y que te van a permitir rápidamente decidir si una función dada **no es derivable en un determinado punto**

Para que una función $f$ **tenga derivada en un punto** $a$**,** o sea que exista la derivada en ese punto, debe cumplirse que:

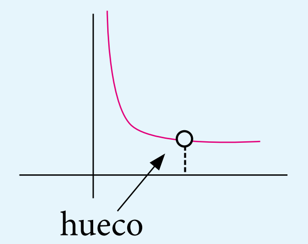
- **Exista el límite en ese punto.**

Por ejemplo la función del gráfico **no tiene límite en** $a$**, por lo que tampoco** tiene **derivada en** $a$**.**



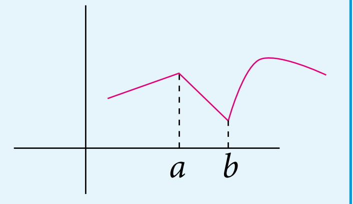

- **Sea continua en ese punto.**

Lo anterior significa que la gráfica no puede tener un **"hueco"** en ese punto, o sea que la función tiene que, además de existir el límite en ese punto, estar definida en dicho punto. En la gráfica puedes ver que esa función **no tiene derivada en a** pues tiene un "hueco" que es una forma rápida de darse cuenta de la discontinuidad.




- **La curva en ese punto sea "suave".**

Una idea de la suavidad es que en ese punto no tenga **"pico"** como los dos que tiene la figura en $a$ y $b$ respectivamente.
Todos los demás puntos de la curva **son suaves**




De las ideas y comentarios anteriores se puede establecer el siguiente ***Teorema:*** **si la función** $y = f(x)$ **es derivable en** $x_0$**, entonces** $y = f(x)$ **es continua en** $x_0$**.**

***Demostración:*** es claro que si $x_0 \neq x$

$$f(x) = f(x) - f(x_0) + f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + f(x_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{h\to 0} (x - x_0) + \lim_{h\to 0} f(x_0) = f'(x) \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0)$$

de donde por definición de continuidad (ver unidad 1) queda demostrado el teorema.

Sobre lo antes planteado es bueno que sepas que la mayor parte de las funciones con las que trabajarás en este curso son derivables, aunque no necesariamente en todos sus puntos, y recuerda que siempre debes estar atento por si en algún caso no lo fuera. En particular nunca olvides que la derivabilidad implica continuidad, pero la continuidad, como en el caso de la función valor absoluto $y = |x|$, no necesariamente implica derivabilidad.

***Algunas derivadas de funciones conocidas***

Como el cálculo de derivadas es un proceso un poco largo, es necesario que te aprendas las derivadas de algunas funciones que son muy utilizadas en la práctica. Por ejemplo la:

- **Derivada de la función lineal**

  Si $\boldsymbol{y = m\,x + n}$, entonces $\frac{dy}{dx} = m$ , pues m es justamente la pendiente de la recta que es su representación gráfica.

- **Derivada de la función constante**

  Si $\boldsymbol{y = c}$ (c es un número real cualquiera) entonces $\frac{dy}{dx} = 0$ , pues la pendiente es 0, o sea que **la derivada de una constante es siempre 0.**

- **Derivada de la función cuadrática del tipo** $y = x^2 + c$ **(c constante)**

  En este caso ya en varios ejemplos se ha obtenido que su derivada es:

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

- **Derivada de la función cúbica** $y = x^3$

  En este caso vamos a usar el procedimiento ya conocido:

$$(x + h)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3 = 3x^2h + 3xh^2 + h^3 = h(3x^2 + 3xh + h^2)$$

Entonces: $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2+3xh+h^2) = 3x^2$

Por tanto, la derivada de la función cúbica es: $\frac{dy}{dx} = 3x^2$

- **Derivada de la función potencia** $y = x^n$

En este caso, como una generalización, que de momento no se va a demostrar, de lo que se ha obtenido para la cuadrática y la cúbica, se tiene que:

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}} \quad \text{con } \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$$

***ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE:***

**Act-26)** Aplicando la definición de derivada, calcula en equipo de trabajo la derivada de la función en el punto indicado.

a) $y = 4x + 3$ en $x_0 = 1$

b) $y = x^2 + 5$ en $x_0 = -1$

c) $y = 4 - x^2$ en $x_0 = 2$

d) $y = 4x - x^2$ en $x_0 = 0$

e) $y = \sqrt{x}$ en $x_0 = 4$

f) $y = 2x - x^2$ en $x_0 = 6$

g) $y = u^3 - 3$ en $u_0 = 2$

h) $y = x^3 - 5x^2 + 1$ en $x_0 = 4$

i) $y = -\dfrac{4}{x}$ en $x_0 = 3$

j) $y = ax^2 + bx + c$ en $x_0 = 1$

**Act-27)** La recta de ecuación $y = 5x - \frac{1}{2}$ es tangente al gráfico de la función $f$ en el punto $x = 2$. Determina $f'(2)$.

**Act-28)** La **figura 2.15** muestra la grafica de $f$ y de su recta tangente. Calcula $f'(3)$.

**Act-29)** En la **figura 2.16** aparece representada una función $f$ y su recta tangente. Calcula $f'(5)$.

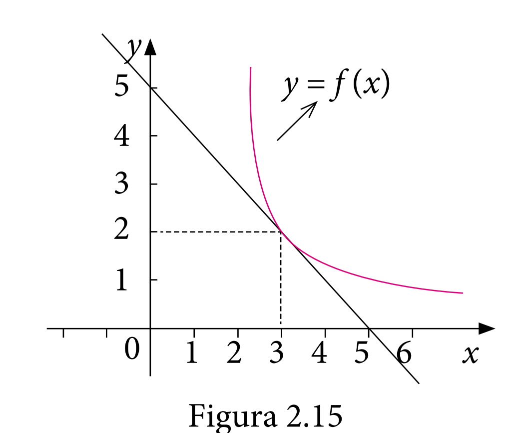


Figura 2.15

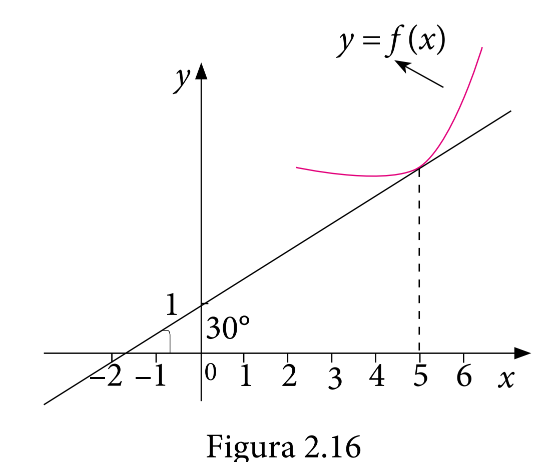


Figura 2.16

**Act-30)** Si $f(4) = -3$ y $f'(4) = 5$, escribe la ecuación de la recta tangente al gráfico de la función $f$ en el punto $x_0 = 4$.

**Act-31)** Determina en equipo de trabajo la función derivada de las siguientes funciones:

a) $y = 5x - 2.3$ b) $y = ax + b$ c) $y = x^2 + x + 1$

d) $y = 1 - x^2$ e) $y = \frac{3}{x}$ f) $y = \frac{k}{x} + c$

h) $y = ax^2 + bx + c$ i) $y = x^4$ j) $f(x) = x^5$

**Act-32)** Calcula la derivada de la función $f(x)=|x-1|$ en los puntos de abscisas $x_0=0$ y $x_1=1$.

(a) ¿Es derivable la función? Fundamenta. (b) ¿Es continua?

**Act-33)** Observa la curva representada en la **figura 2.17.**

a) ¿En cuáles de los puntos cuyas abscisas son $x_1=0$ , $x_2=1$ , $x_3=2$ , $x_4= 2.5$, $x_5=3$ es derivable la función que representa la curva?

b) Calcula la pendiente de la curva en los puntos de abscisas $x=2.5$ y $x=4$.

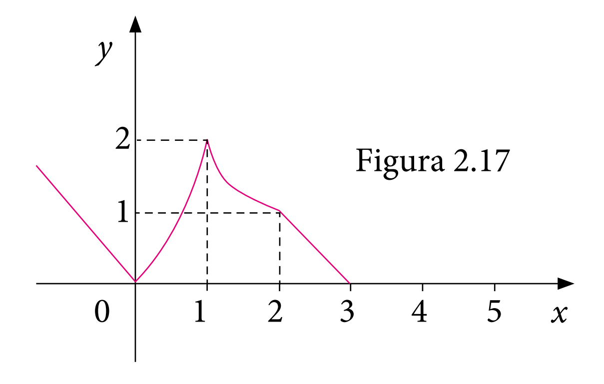


Figura 2.17

**Act-34)** ¿Qué diferencias existen entre la derivada de una función en un punto y la función derivada?

**Act-35)** Determina los puntos de la curva $f(x) = x - x^2$ en los cuales la tangente forma con el eje X un ángulo de:

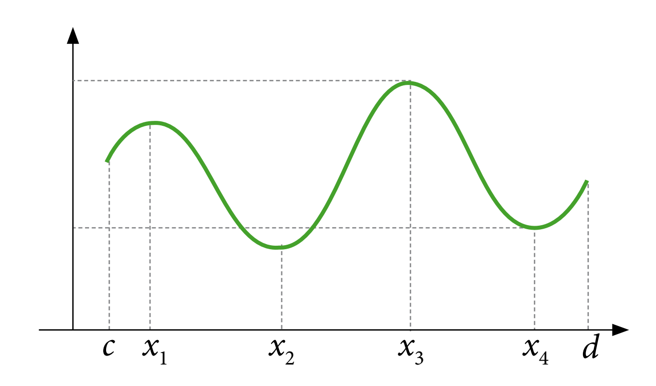
a) 45º b) 0º c) 135º.

**Act-36)** Determina el ángulo de inclinación de la tangente a la curva en el punto indicado.

a) $y=x^3$ en $(0, 0)$ b) $y = x^4$ en $(2, 16)$

**Act-37)** Determina la primera, la segunda, la tercera y la cuarta derivada de la función $y = 3x^4+3x^3-10$.

**Act-38)** Analiza la siguiente gráfica de la función $y = f(x)$ .

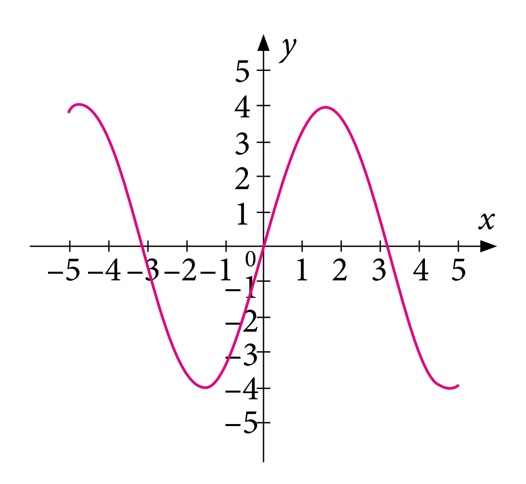



Y diga cuales de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuales son falsas:

a) En los puntos $A(x_2, f(x_2))$ y $B(x_4, f(x_4))$ la curva de la función tiene mínimos relativos y su pendiente es igual a cero.
b) La derivada de la función en los puntos $C(x_1, f(x_1))$ y $D(x_3, f(x_3))$ es igual a cero.
c) Los valores $y = f(x_1)$ y $y = f(x_3)$ son máximos relativos de $y = f(x)$.
d) En los intervalos $(c, x_1)$, $(x_2, x_3)$ y $(x_4, d)$ la función $y = f(x)$ es creciente y su derivada es positiva.
e) En los intervalos $(x_1, x_2)$ y $(x_3, x_4)$ la función $y = f(x)$ es decreciente y su derivada es negativa.

**Act-39)** En base a la gráfica de la función $y = f(x)$, ¿cuál de las siguientes proposiciones es verdadera?

a) $f$ tiene pendiente cero en $x = 3$.
b) $f$ tiene pendiente cero en $x = 0$.
c) $f$ tiene pendiente negativa en $x = -1$
d) $f$ tiene pendiente positiva en $x = 0$
e) $f$ tiene pendiente cero en $x = -2$
f) $f$ tiene pendiente cero en $x = 2$

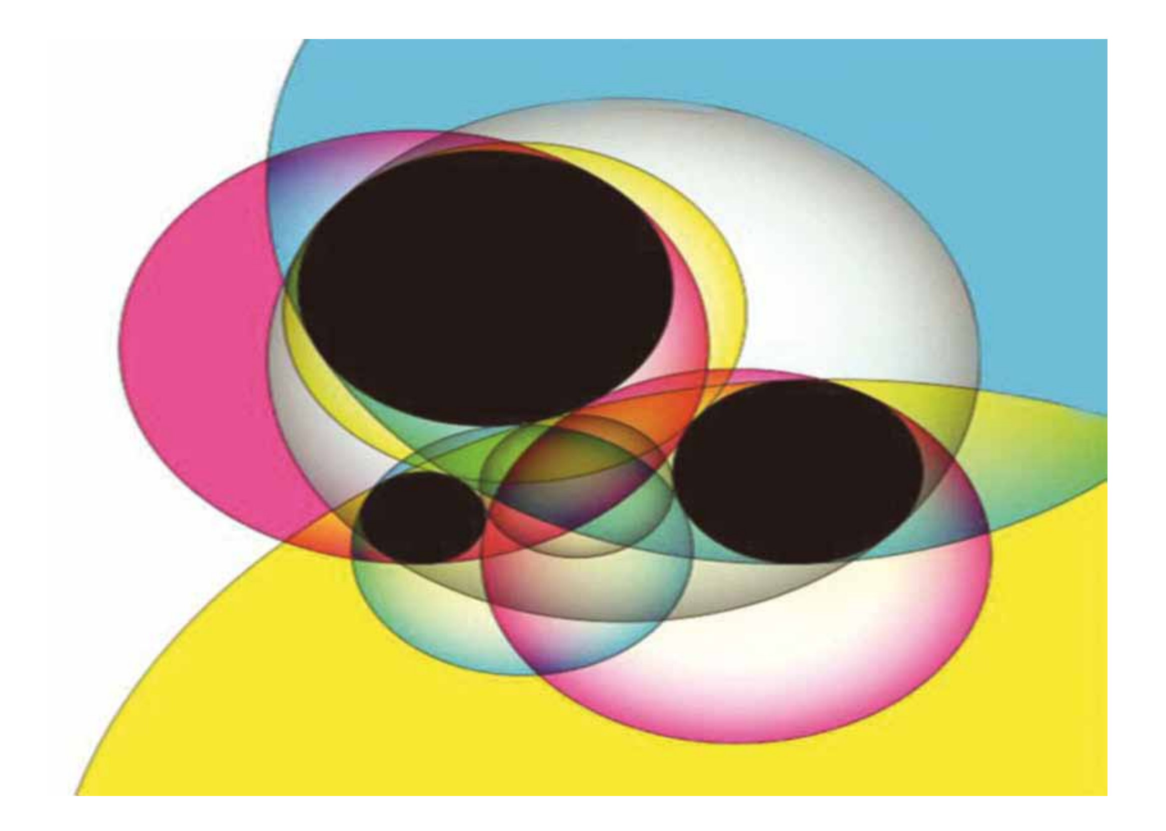



**Act-40)** De la función polinomial $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 15$, y considerando que en los puntos donde una función tiene máximos y mínimos relativos su derivada es igual a cero, determinar sus valores máximos y mínimos relativos y los intervalos donde es creciente y decreciente.

**Act-41)** Se desea construir una caja sin tapa, de base rectangular, a partir de una lámina cuadrada de 60 unidades de longitud de lado, recortando cuadrados de sus esquinas y doblando las pestañas sobrantes para que sean su altura. Calcular, en equipo de trabajo colaborativo, las dimensiones de la caja de mayor volumen.

**Act-42)** Se lanza un objeto verticalmente hacia arriba con una velocidad de $60\ m/seg$. Su altura en metros sobre su punto de lanzamiento está dada por la función $h(t) = 65t - 4.9t^2$. Determina: (a) la velocidad instantánea del objeto a los $t$ segundos de su lanzamiento; (b) la velocidad instantánea del objeto a los 3 y 7 segundos de su lanzamiento; (c) el tiempo en que el objeto alcanza la altura máxima.

**Act-43)** Escribe un resumen, de 2 a 3 cuartillas como máximo, sobre las cosas más importantes que aprendiste en esta unidad sobre el concepto de derivada de una función.



UNIDAD DE APRENDIZAJE III

# CÁLCULO DE DERIVADAS MEDIANTE REGLAS, FÓRMULAS Y TÉCNICAS DE DERIVACIÓN

**Competencia de unidad:** Demuestra analíticamente las fórmulas básicas de derivación de funciones algebraicas y trascendentes, y las aplica críticamente al cálculo directo de derivadas a través de diversas técnicas de derivación.

## COMPETENCIAS DISCIPLINARES QUE PROMUEVE

En esta unidad de aprendizaje se contribuye de manera directa a desarrollar las siguientes competencias disciplinares del área de matemáticas:

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos y operaciones aritméticas, algebraicas y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

## CONTENIDO TEMÁTICO:

**3.1. Introducción.**
**3.2. Reglas básicas de derivación para: sumas, restas, productos y cocientes de funciones. Regla de la cadena.**
**3.3. Derivadas de orden superior. Derivación implícita.**
**3.4. Derivada de las funciones trascendentes: trigonométricas, exponenciales y logarítmicas**





# UNIDAD DE APRENDIZAJE III

# CÁLCULO DE DERIVADAS MEDIANTE REGLAS, FÓRMULAS Y TÉCNICAS DE DERIVACIÓN

## *3.1. Introducción*

En esta unidad de aprendizaje se estudian las **fórmulas y técnicas básicas de derivación** teniendo en cuenta que se trata de un curso introductorio de Cálculo Diferencial y, por esta razón, no se tratan de buscar teoremas fuertes, sino desarrollar las reglas que se aplican en los cálculos usuales. Es esencial que los alumnos dominen las reglas básicas de derivación y sean capaces de derivar directamente las funciones algebraicas y trascendentes.

Aquí se debe tener en cuenta que al calcular la derivada se debe tratar de expresar el resultado en la forma más simplificada posible, lo que conduce a la realización de cálculos algebraicos que contribuyen a seguir desarrollando las competencias y habilidades fundamentales promocionadas en cursos de matemáticas anteriores.

## *3.2. Reglas y fórmulas básicas de derivación*

De la unidad de aprendizaje anterior te habrás dado cuenta que la derivación de funciones a partir de su definición, usando la regla de los cinco pasos, puede resultar regularmente bastante laboriosa y hasta engorrosa ya que a veces se requieren artificios algebraicos, excepto en casos relativamente sencillos.

Por ello es conveniente establecer reglas que permitan efectuar rápidamente el cálculo de diversas derivadas de funciones de uso frecuente.

A continuación, en el ***teorema 1,*** se enuncian y demuestran algunas de estas reglas básicas de derivación.

**Teorema 1.** Si ***f*** y ***g*** son funciones ***derivables***, se cumple que:

1. La derivada de la suma (diferencia) de dos funciones es la suma (diferencia) de sus derivadas.

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

2. La derivada del producto de dos funciones es la derivada del primer factor por el segundo más el primer factor por la derivada del segundo.

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Como una consecuencia de la derivada de un producto se tiene que:

3. La derivada del producto de una función por una constante es el producto de la constante por la derivada de la función.

$$(c \cdot f)' = c \cdot f' \text{ con } c \in \Re$$

4. La derivada de un cociente es la derivada del numerador por el denominador menos el numerador por la derivada del denominador sobre el cuadrado del denominador.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} \quad , \quad g(x) \neq 0$$

Como una consecuencia de la derivada de un cociente se tiene que:

5. La derivada del recíproco de una función es el opuesto de la derivada de la función dividida por el cuadrado de la función.

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{(f(x))^2} \quad , \quad f(x) \neq 0$$

A continuación, a partir de la definición de derivada y aplicación de la **regla de los 5 pasos,** se van a demostrar las reglas de derivación para la suma, el producto y el cociente de funciones.

**Demostración:**

(1) Se va a demostrar que si $f$ y $g$ son dos funciones derivables entonces se cumple que $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

Como las funciones son derivables existen $f'(x)$ y $g'(x)$ tales que:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{y} \quad g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

donde $\boldsymbol{h}$ es **el incremento** de la función con respecto a la variable $x$.

Sea $w(x) = f(x) + g(x)$, entonces, $w(x+h) = f(x+h) + g(x+h)$. Y siguiendo el procedimiento ya conocido de la regla de los 5 pasos:

$w(x+h) - w(x) = f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)$

Dividiendo por $h$ se tiene que:

$$\frac{w(x+h)-w(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

Haciendo **tender *h* a 0** ($h \to 0$) y aplicando propiedades de los límites estudiados en la unidad de aprendizaje 1 se tiene que:

$$w'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{w(x+h) - w(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \left( \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$$

Luego se cumple que: $\boxed{f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)}$ ,que es lo que se quería demostrar. La demostración es análoga para la diferencia de dos funciones derivables.

(2) Ahora se va a demostrar que si $f$ y $g$ son dos funciones derivables entonces se cumple que $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

Como las funciones son derivables existen $f'(x)$ y $g'(x)$ tales que:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{y} \quad g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

donde ***h*** es **el incremento** de la función con respecto a la variable $x$.

Sea $w(x) = f(x) \cdot g(x)$, entonces: $w(x+h) = f(x+h) \cdot g(x+h)$

$\Rightarrow w(x+h) - w(x) = f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)$

Restando y sumando $f(x+h) \cdot g(x)$ en el lado derecho de la igualdad anterior se obtiene:

$w(x+h) - w(x) = f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x+h) \cdot g(x) + f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)$

Factorizando y dividiendo por h se tiene que:

$$\frac{w(x+h)-w(x)}{h} = \frac{f(x+h)[g(x+h)-g(x)]}{h} + \frac{g(x)[f(x+h)-f(x)]}{h}$$

Haciendo **tender *h* a 0** ($h \to 0$) y calculando el límite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{w(x+h) - w(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)[g(x+h) - g(x)]}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x)[f(x+h) - f(x)]}{h}$$

$$\Rightarrow w'(x) = [\lim_{h\to 0} f(x+h)]\left[\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right] + [\lim_{h\to 0} g(x)]\left[\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]$$

Como la función $y = f(x)$ es derivable, entonces es continua, y como $g(x)$ no depende de ***h*** se concluye respectivamente que:

$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x+0) = f(x)$ y $\lim_{h\to 0} g(x) = g(x)$

Por lo tanto: $w'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$

Luego, como se quería demostrar, se cumple que:

$$\boxed{(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f'(x) \cdot g'(x)}$$

(4) Ahora se va a demostrar que si $f$ y $g$ son dos funciones derivables entonces se cumple que:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} \quad , \quad g(x) \neq 0$$

Por la hipótesis de derivabilidad existen $f'(x)$ y $g'(x)$ tales que:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{y} \qquad g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Ahora sea $w(x)$, entonces: $\frac{f(x)}{g(x)}$ ; $g(x) \neq 0$, entonces:

$$w(x+h) - w(x) = \frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x) f(x+h) - f(x) g(x+h)}{g(x+h)\, g(x)}$$

Restando y sumando $f(x) \cdot g(x)$ en el numerador de la igualdad anterior se obtiene:

$$w(x+h) - w(x) = \frac{g(x) f(x+h) - g(x) f(x) + g(x) f(x) - f(x) g(x+h)}{g(x+h)\, g(x)}$$

Dividiendo por $h$, reagrupando y factorizando términos se tiene que:

$$\frac{w(x+h) - w(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\frac{g(x)[f(x+h) - f(x)] - f(x)[g(x+h) - g(x)]}{g(x+h)\, g(x)}\right]$$

$$= \frac{g(x)}{g(x+h)\, g(x)} \left[ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right] - \frac{f(x)}{g(x+h)\, g(x)} \left[ \frac{g(x+h)-f(x)}{h} \right]$$

Haciendo **tender *h* a 0** ($h \to 0$) y calculando el límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{w(x+h)-w(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{g(x)}{g(x+h)g(x)} \left[ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right] - \frac{f(x)}{g(x+h)g(x)} \left[ \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \right] \right\}$$

Pero, $\lim_{h \to 0} g\,(x+h) = g(x+0) = g(x)$, ya que $y = g(x)$ es continua por ser derivable. Por lo tanto, aplicando las propiedades de los límites se obtiene que:

$$w'(x) = \frac{g(x)}{g(x)g(x)}[f'(x)] - \frac{f(x)}{g(x)g(x)}[g'(x)] = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g(x)g(x)}$$

Con lo cual termina la demostración ya que se concluye que:

$$\left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \quad ; \quad g(x) \neq 0$$

Una importancia de este teorema 1 es que, junto con las derivadas que ya aprendiste en la unidad de aprendizaje 2, **te permite derivar funciones racionales.**

**Ejemplo 1:** Deriva las siguientes funciones.

a) $y = x + \sqrt{2}$ b) $y = x^2 + 3x - 1$ c) $f(x) = \frac{1}{3}x - x^2$

**Resolución:**

a) Si $y = x + \sqrt{2}$ entonces aplicando el teorema 1 (parte 1) y el conocimiento de que la derivada de una constante es 0 se tiene que:

$y' = (x + \sqrt{2})' = (x)' + (\sqrt{2})' = 1 + 0 = 1$

b) $y' = (x^2+3x+1)' = (x^2)' + (3x)' + (1)' = 2x+3+0 = 2x+3$

c) $f'(x) = \left( \frac{1}{3}x - x^2 \right)' = \left( \frac{1}{3}x \right)' - (x^2)' = \frac{1}{3} - 2x$

**Ejemplo 2:** Determina la derivada de la función $y= (x^2 + 3x)(x–1)$.

**Resolución:** En este caso aplicamos el teorema 1 (parte 2)

$y'= (x^2 + 3x)' (x–1) + (x^2 + 3x) (x–1)'$

La derivada de cada factor se obtiene aplicando el teorema 1 (parte 1)

$y'= (2x + 3) (x–1) + (x^2 + 3x) \cdot 1= 2x^2 – 2x + 3x – 3 + x^2 + 3x$

Simplificando: $y'= 3x^2 + 4x –3$

**Ejemplo 3:** Deriva la función $f(x) = (x−1)(x−2)(x−3)$.

**Resolución:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x–1)'(x–2)(x–3)+(x–1)(x–2)'(x–3)+(x–1)(x–2)(x–3)' \\ &= 1\cdot (x–2)(x–3)+(x–1) \cdot 1 \cdot (x–3) + (x–1)(x–2) \cdot 1 \\ &= x^2–5x+6+x^2–4x+3+x^2 –3x + 2=3x^2–12x +11 \end{aligned}$$

También se puede proceder efectuando primero el producto y después aplicando el teorema 1(parte 1):

$f(x)=(x–1)(x–2)(x–3)= x^3 –6x^2 + 11x – 6 \qquad \Rightarrow f'(x)=3x^2–12x + 11$

**Ejemplo 4:** Calcula la derivada de la función $y= 8x^4$

**Resolución:** Se conoce que $(x^4)' = 4x^3$, luego, $y' = 8 \cdot (x^4)' = 8 \cdot 4x^3 = 32x^3$.

**Ejemplo 5:** Deriva la función $y = \dfrac{1}{3x^2–5x+1}$

**Resolución:** Aplicamos el teorema 1(parte 5)

$$y = \frac{–(3x^2–5x+1)'}{(3x^2–5x+1)^2} = \frac{–(6x–5)}{(3x^2–5x+1)^2} = \frac{5–6x}{(3x^2–5x+1)^2}$$

**Ejemplo 6:** Derivar las funciones (a) $y = \dfrac{5x–2}{2x+3}$ y (b) $h(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ .

**Resolución:** Aplicamos el teorema 1(parte 4)

a) $$y'= \frac{(5x–2)' \ (2x+3)– (5x–2)(2x+3)'}{(2x+3)^2}$$

$$= \frac{(5)(2x+3)– (5x–2)(2)}{(2x+3)^2} = \frac{10x+15–10x+4}{(2x+3)^2} = \frac{19}{(2x+3)^2}$$

b) $$h'(x)=\frac{(x^2)' \ (x^2+1)–x^2(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{(2x)(x^2+1)–(x^2)(2x)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

**Ejemplo 7:** Determina en el punto $P(4\ ,\ y_0)$ las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la parábola $x^2=16y$.

**Resolución:** De $x^2 = 16$ y, se obtiene $y = \frac{1}{16}x^2$, luego $y_0 = \frac{1}{16} \cdot 4^2 = 1$

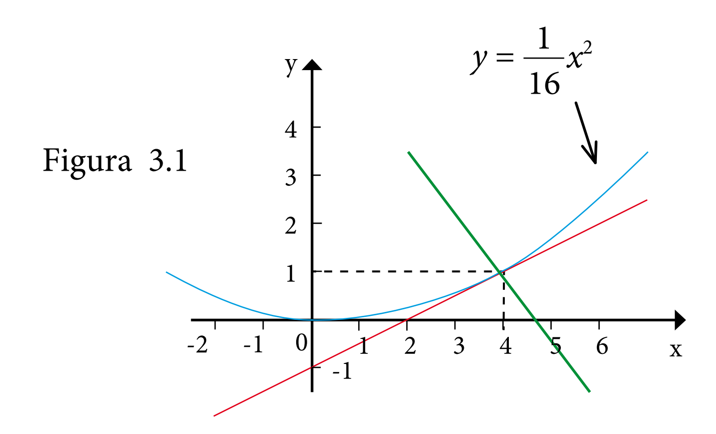
Derivando: $y' = \frac{1}{16}(2x) = \frac{1}{8}\ x$ y evaluando en $x = 4$ obtenemos $y'(4) = \frac{1}{2}$ .

La recta tangente tiene pendiente $m = \frac{1}{2}$, y la ***recta normal*** como es perpendicular a la tangente, su pendiente es $m = -2$.Y como las dos pasan por el punto $P(4\ ,\ 1)$ (ver figura 3.1). Se concluye que sus respectivas ecuaciones son:

Recta tangente: $y-(1)=\frac{1}{2}(x-4) \quad \Rightarrow \quad x-2y-2=0$ .

Recta normal: $y-(1)=-2(x-4) \quad \Rightarrow \quad 2x+y-9=0$.

Figura 3.1




Para finalizar este epígrafe a continuación aparece un cuadro en el que se resumen las reglas que hasta ahora has aprendido para calcular derivadas, incluidas las del teorema 1.



**Estas reglas debes aprenderlas de memoria y saber utilizarlas.**

| Resumen de las primeras reglas de derivación | |
|---|---|
| 1. $(mx+n)' = m$ | 5. $(f \pm g)' = f' \pm g'$ |
| 2. $(c)' = 0$ (c **constante)** | 6. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ |
| 3. $(x^n)' = nx^{n-1}$ ; $n \in \mathrm{N}$ | 7. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - = f \cdot g'}{g^2}$ $(f \neq 0)$ |
| 4. $(c \cdot f)' = c \cdot f'$ | 8. $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$ $(f \neq 0)$ |

**Nota:** Sobre el uso de estas reglas debes saber que durante muchos siglos el desarrollo de destrezas en el cálculo de derivadas fue uno de los objetivos principales de la enseñanza del cálculo diferencial, sin embargo, gracias a los procesadores matemáticos como el DERIVE (y otros), el aprendizaje de las reglas de derivación puede reducirse a los elementos esenciales y de mayor uso ya que con los procesadores puede realizarse el cálculo rutinario.

***ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE:*** 

**Act-1)** En equipo de trabajo colaborativo determina la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = x^8$

b) $y = 3x^5$

c) $y = x^{-6}$

d) $y = \frac{4}{x^5}$

e) $y = x^8 + 3x^5 + 5x^4 - 8$

f) $y = \frac{1}{8}x^8 - 11x + 6$

g) $y = x^3 (x^2 - 5x + 6)$

h) $y = (x^2 - x + 1)^2$

i) $y = \frac{x^2 + 1}{2x}$

j) $y = \frac{x^2 - x + 1}{x-6}$

k) $y = (2x - 1)(3x - 1)(x+5)$

l) $y = x^2 (x - 3)$

m) $f(x) = (x - 2)(x^2 + x + 8)$

n) $y = (7x - 1)(x + 3)$

ñ) $y= 3(x–2) + (x–1)\,(x–2)$

o) $(x^2–2)(x^2+3)$

p) $y = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\right)^2$

q) $y = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$

r) $y = \frac{4}{x^2+3}$

s) $y = \frac{1}{x-2}$

t) $y = \frac{5x-3}{3}$

u) $y = \frac{5}{1+x^2}$

v) $y = \frac{x-1}{x^2-1}$

w) $y = \frac{2x^2 - x}{3x^4 - 2x - 7}$

x) $y = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}$

y) $y = \frac{5x^3}{x^2-4} + \frac{2}{x+2}$

**Act-2)** Calcula el valor de la derivada y la pendiente de la curva de la función en el punto de abscisa indicada.

a) $y= 3x^3–2x^2 + 5x–4$ $\qquad x_0 = -1$

b) $y= \sqrt{2}\,x^2+ \sqrt{3}\,x–5$ $\qquad x_0 = 4$

c) $y= 4x^2–\frac{2}{5}x + 0.01$ $\qquad x_0 = 1.5$

d) $y= 2x^5+x^4–x^3 + 4$ $\qquad x_0 = 0.1$

e) $y = \frac{x^2-2}{3-x^2}$ $\qquad x_0 = \frac{2}{3}$

f ) $y = \frac{x^2-x-2}{x^2+x}$ $\qquad x_0 = \frac{1}{2}$

g ) $y = \frac{3x-2}{x^2-5x+6}$ $\qquad x_0 = 1$

**Act-3)** ¿En qué punto la derivada de la función $f(x)= x^2$ coincide numéricamente con el valor de la propia función, es decir, $f(x)=f'(x)$?

**Act-4)** Sabiendo que la derivada de $f$ es $f'(x)= 5x^2 -3$, determina la derivada de la función g si $g(x)= 4f(x) -11$.

**Act-5)** Si $f'(x)= 3x^2 + 5x + 1$, determina la derivada de g si se sabe que $g(x)= 2f(x)$.

**Act-6)** Si $f$ y $g$ son funciones derivables y $f(x) +g(x)= 5$ para toda $x \in \Re$ , prueba que $f'(x)=- g'(x)$

**Act-7)** Sabiendo que $f$ y $g$ son funciones derivables y $f(x) +g(x)= 4x$ y $f(x)-g(x)=6$ , determina $f'(x)$ y $g'(x)$.

**Act-8)** Considera las funciones:

$$f(x) = \frac{x}{x+1} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{-1}{x+1}$$

a) Comprueba que $f'(x) = g'(x)$

b) Comprueba que existe un número real $c$ tal que $f(x) = g(x) + c$.

c) ¿Qué relación existe entre dos funciones cuyas derivadas sean iguales? Argumenta y fundamenta.

**Act-9)** Deriva la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 5x + 6}$

a) aplicando la regla de derivación de un cociente,

b) considerándola como recíproco de $g(x) = x^2 + 5x + 6$

**Act-10)** Determina una función $f$ que satisfaga las condiciones:

a) $f'(x) = 3x^2$ — $f(0) = 2$

b) $f'(x) = 4x^3 + x^2$ — $f(1) = 4/3$

c) $f'(x) = x^5 - x^4 + 2x$ — $f(1) = 4/3$

d) $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3} - \dfrac{3}{x^4} - \dfrac{4}{x^5}$ — $f(1) = 4$

e) $f'(x) = x^{-2}\,(4x^5 + 6x^4 - 5x^2)$ — $f(1) = 2$

**Act-11)** Determina las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva de ecuación $y = f(x)$ en el punto indicado.

a) $y = \dfrac{1}{x}(x+2)$ en $x_0 = 1$

b) $y = x^2 - \dfrac{1}{x} + 1$ en $x_0 = 2$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}(x^2+4)$ en $x_0 = 1$

d) $y = (x-1)(x^2-2)^2$ en $x_0 = \dfrac{1}{2}$

e) $y = x^2 + x - 1$ en $x_0 = 0$

f) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+3}$ en $x_0 = -4$

**Act-12)** De las siguientes funciones determina los puntos en que su curva tienen una pendiente igual a cero, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento:

a) $y = x^2 + x - 6$

b) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

c) $y = 3x^5 - 5x^3$

d) $y = \frac{4x}{x^2+4}$

**Act-13)** Determina las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la parábola $x^2 = 25y$ en el punto de abscisa $x = 5$.

**Act-14)** Determina las ecuaciones de las tangentes a la parábola $y = 3x^2 + 3x - 6$ en los puntos de ordenada $y = 0$.

**Act-15)** Determina la ecuación de la parábola $y = x^2 + bx + c$ cuya tangente en el punto (1 , 1) es la recta $y = x$.

**Act-16)** Demuestra que las curvas $y = x^3 + 2$ e $y = 2x^2 + 2$ tienen una tangente común en el punto (0 , 2).

**Act-17)** En qué punto la tangente a la parábola $y = x^2 - 7x + 3$ es: (a) paralela a la recta $5x + y - 3 = 0$ (b) paralela al eje X.

**Act-18)** Una flecha se lanza verticalmente hacia arriba desde una plataforma y su función de desplazamiento (en metros) esta dada por $s(t) = -4.9\,t^2 + 90t + 15$.
(a) Calcula su velocidad instantanea a los 2, 4, 6, 8 y 10 segundos (b) Determina la altura maxima alcanzada (c) calcula la velocidad con que cae al suelo.

**Act-19)** Una partícula se mueve en linea recta y su posición está dada por la función $s(t) = t^3 - 6\,t^2 + 9t$. (a) Calcula su velocidad instantanea a los 2, 4, y 5 segundos (b) el tiempo en que la partícula esta en reposo (c) calcula la distancia total recorrida durante los primeros 5 segundos.

**Act-20)** Demuestra que la derivada de la diferencia de dos funciones derivables es la diferencia de sus derivadas: $(f - g)' = f' - g'$.

**Act-21)** Demuestra las partes 3 y 5 del ***teorema 1***.

***Otras reglas de derivación. Regla de la cadena***

Todas las reglas de derivación que hemos estudiado hasta ahora se refieren a operaciones racionales con funciones; una operación irracional que se presenta con frecuencia es **la radicación**, tal como se muestra a continuación ***para la derivada de un radical.***

**Teorema 2:** La función $y=\sqrt{x}$ $(x>0)$ es **derivable** y se cumple que:

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

**Demostración:** Para la demostración se tratará de salir de los radicales que aparecen en el numerador de la expresión del límite y para ello se multiplicará ambos términos del cociente por $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$ que es la conjugada del numerador.

Multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$ se obtiene:

$$\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{(\sqrt{x+h})^2-(\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

Se tiene entonces que: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

como se quería demostrar.

**Ejemplo 8:** Deriva las siguientes funciones.

a) $y=\sqrt{36x}$ b) $y=x^2\sqrt{x}$ c) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x}$

**Resolución:**

a) $y=\sqrt{36x}=6\sqrt{x}$, por lo que: $y'=6\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{3}{\sqrt{x}}=\dfrac{3\sqrt{x}}{x}$

b) Como $y=x^2\sqrt{x}$ es un producto de funciones, se aplica la regla de la derivada de un producto y se obtiene:

$$y=2x\sqrt{x}+x^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=2x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2\sqrt{x}}=2x\sqrt{x}+\frac{x\sqrt{x}}{2}=\frac{5}{2}x\sqrt{x}$$

c) Como $y=\frac{\sqrt{x}}{x}$, se aplica primero la regla para el cociente:

$$y'=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot x-\sqrt{x}\cdot 1}{x^2}=\frac{\frac{x}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{x^2}=\frac{\frac{\sqrt{x}}{2}-\sqrt{x}}{x^2}=\frac{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}{x^2}=-\frac{\sqrt{x}}{2x^2}$$

***La derivada de funciones compuestas***

Recuerda que **la función compuesta de g** y ***f***, que **se denota** por ***f*** ∘ **g** se comporta como se indica en el gráfico siguiente. Esta nueva función $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ se **lee g compuesta con *f*** por que se leen en sentido contrario a como se escriben ya que realmente la primera que se aplica es **g** como ves en el gráfico.

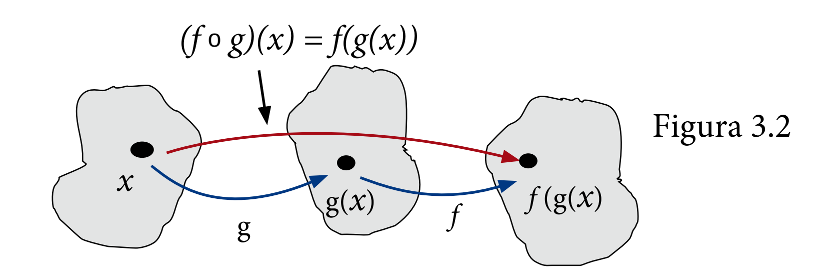



Figura 3.2

Son ejemplos de funciones compuestas $y=(3x-5)^{20}$ y $y=\sqrt{1+x^2}$ .

En el primer caso sí $g(x)=3x-5$ y $f(x)=x^{20}$, entonces:

$f(g(x))=f(3x-5)=(3x-5)^{20}$. Es decir $(f\circ g)(x)=(3x-5)^{20}$.

Observen que en la compuesta la función más interior, en este caso $g(x)$, es la primera que se aplica y la más exterior, en este caso $f(x)$, es la última que se aplica.

Como hay infinidad de funciones que son compuestas, conocer la regla para derivarlas permite aumentar considerablemente el número de funciones que podemos derivar. Dicha regla la enunciamos a continuación si demostración, y se llama regla de la cadena.

**Teorema 3 (Regla de la Cadena):** Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son derivables, entonces la función compuesta $w(x)=f(g(x))$ es derivable y se cumple

$$[f(g(x))]'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

**Ejemplo 9:** Calcula la derivada de la función $y=(3x-5)^{20}$.

**Resolución:** Para aplicar la regla lo más difícil es reconocer cuáles son las funciones que componen la función compuesta. En este caso ya antes viste que esas funciones son: $f(x)=x^{20}$ y $g(x)=3x-5$.

Si aplicamos la regla $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ tendríamos que derivar primero a $f$ que es la última que se aplica y evaluarla en $g$ que es la primera, y después multiplicarla por la derivada de $g$.

Si vas paso a paso sería:

$f(x)= x^{20}$ , $f'(x)= 20x^{19}$ ($f(x)$ y derivada de $f$)
$g(x)= 3x-5$, $g'(x)= 3$ ($g(x)$ y derivada de $g$)

Aplicando finalmente la regla de la cadena se tiene que:

$$(f \circ g)'(x) = 20(3x-5)^{19} \cdot (3x-5)' = 20(3x-5)^{19} \cdot 3 = 60(3x-5)^{19}$$

En la práctica no se hace todo el anterior desarrollo, sino que después de identificar las funciones que componen la compuesta y en qué orden se componen, se realiza directamente:

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(3x-5) \cdot (3x-5)' = 20(3x-5)^{19} \cdot 3 = 60(3x-5)^{19}$$

**Ejemplo 10:** Deriva la función $y=(x^2-6x + 5)^{10}$.

**Resolución:** Las funciones que componen la compuesta son $f(x)= x^{10}$ y $g(x) = x^2-6x + 5$. Sus derivadas respectivas son $f'(x)= 10x^9$ y $g'(x)=2x-6$.

Entonces:

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(x^2-6x+5) \cdot g'(x)$$
$$=10(x^2-6x+5)^9 \cdot (2x-6)$$
$$= 20(x-3)(x^2-6x + 5)^9$$

Cuando tengas práctica el proceso de identificación de las funciones componentes lo vas a hacer en la mente y vas a poder llegar simplemente a escribir:

$$y' = 10(x^2-6x+5)^9 \cdot (x^2-6x+5)' = 10(x^2-6x+5)^9 \cdot (2x-6)$$
$$= 20(x-3)(x^2-6x+ 5)^9$$

**Ejemplo 11:** Determina la derivada de la función $y=\sqrt{1 + x^2}$

**Resolución:** $y= f(g(x))$ siendo $f(x)= \sqrt{x}$ y $g(x) = 1+x^2$

Como $f'(x)= \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ y $g'(x)=2x$, entonces:

$$y'=f'(1+x^2) \cdot g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot (1+x^2)' = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}$$

## ***ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE:*** 

**Act-22)** Determina la derivada de las siguientes funciones.

a) $y = \sqrt{x} + 5$

b) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}$

c) $y = \sqrt{x}\,(2 + \sqrt{x})$

d) $y = x^4\,(1 + \sqrt{x})$

e) $y = \dfrac{x}{x + 5\sqrt{x}}$

f) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{1 - x}$

**Act-23)** Deriva las siguientes funciones.

a) $y = (2x + 1)^3$

b) $y = (3x^2 + 5\sqrt{x} - 1)^5$

c) $y = (x^4 + 2)^3\,(x^2 + x - 3)^2$

d) $y = \left(\dfrac{5}{3}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 + \dfrac{7}{4}\right)^3$

e) $y = \sqrt{9x + 4}$

f) $y = \sqrt{3x - x^2}$

g) $y = \dfrac{5}{4}\sqrt{16 - x^2}$

h) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

i) $y = \left(2x^3 - \dfrac{1}{3}x^2 + x^3\right)^4$

j) $y = \left(\dfrac{2}{5}x^5 - 3x^4 + 12x - x^3\right)^6$

k) $y = \left[(2x+1)\left(x - \dfrac{1}{2}\right)\right]^3$

l) $y = \left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^3$

m) $y = \left(\dfrac{x^2 - x + 3}{x^2 + 3}\right)^{2/5}$

n) $y = \sqrt{3x^3 - \dfrac{16}{3}x^4 - x^5}$

ñ) $y = 2\sqrt{3x^2 - 2x^3 + 5}$

o) $y = \sqrt{\dfrac{2x+1}{x+4}}$

p) $y = \sqrt[3]{\left(\dfrac{x}{x^2+5}\right)^2}$

q) $y = \sqrt[5]{\dfrac{x^3}{x^3+1}}$

**Act-24)** Calcula el valor de la derivada y la pendiente de la curva en el punto indicado.

a) $y=(x^2-x+1)^4$ $\qquad x_0 = 1$

b) $y=(3x^2-1)^{10}$ $\qquad x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ $\qquad x_0 = 2$

d) $y=\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^4+1\right)^2$ $\qquad x_0 = \frac{1}{2}$

e) $y = \sqrt{2.5\,x^2 - 0.5x}$ $\qquad x_0 = -2$

f) $y = \sqrt{x^6 + 2x^7 - 4x^9 + 12x}$ $\qquad x_0 = 1$

**Act-25)** Deriva las funciones $f(x) = (ax^6 + \mathrm{b})^2$ y $\mathrm{g}(x) = (x^2 - 4)^3$

(a) empleando la regla de la cadena
(b) desarrollando primero el binomio

**Act-26)** Calcula el ángulo de inclinación de la curva $y=\frac{1}{2}(x-3)(x^2+1)$ en los puntos en que corta al eje X (ángulo de inclinación de una curva en un punto es el ángulo de inclinación de la tangente a la curva en dicho punto).

**Act-27)** Otra manera de formular la regla de la cadena es la siguiente: Si $y=f(\mathrm{z})$ y $\mathrm{z}=\mathrm{g}(x)$ son funciones derivables, entonces se cumple que:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{dz}}\cdot\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{d}x}$$

Aplica esta regla para calcular $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ en los siguientes casos:

a) $y = \mathrm{z}^2$ , $\mathrm{z} = -4 + 6x - x^2$

b) $y = \sqrt{\mathrm{z}}$ , $\mathrm{z} = 6x - 2$

c) $y = 3\mathrm{w}^5$ , $\mathrm{w} = 10x^2 - x$

d) $y = \mathrm{p}^7$ , $\mathrm{p} = (3x^2 - 5)^2$

## *3.3. Derivadas de orden superior. Derivación implícita.*

En la unidad de aprendizaje 2 estudiaste que puede ocurrir que la derivada de la función $f$ sea a su vez una función derivable. En tal caso a **la derivada de la derivada de $f$ se le llama segunda derivada de $f$ y se denota por $f''$.**

Y análogamente, si la segunda función derivada es también derivable, **la derivada de la segunda derivada de $f$ es la tercera derivada de $f$ que se denota por $f'''$,** y así sucesivamente.

De igual modo se puede calcular sucesivamente la cuarta derivada y se habla entonces de **derivadas sucesivas o derivadas de orden superior.**

En general, una derivada superior es la ***n-ésima derivada*** de $y=f(x)$ cuando $n$ es mayor que uno, y se representa de la siguiente manera:

$$f^{(n)}(x)=[f^{(n-1)}(x)] \;\; ; \;\; n>1$$

Donde: ($n$) es el orden de la derivada, y se escribe entre paréntesis para que no se confunda con un exponente.

La notación anterior para derivadas de orden superior suele usarse cuando $n > 3$.

**Ejemplo 12:** Calcula la tercera derivada de $f(x) = 4x^3$

**Resolución:** En este caso debemos primero calcular la primera derivada y después la derivada de ella que es la segunda derivada de la función dada. Y finalmente se calcula la derivada de la segunda derivada que será finalmente la tercera derivada.

$$f(x)=4x^3 \Rightarrow g(x)=f'(x)=12x^2 \qquad \Rightarrow g'(x)=f''(x)=24x$$

$$\Rightarrow g''(x)=f'''(x)=24$$

**Ejemplo 13:** Calcula la segunda derivada de $f(x)=(x^2+1)^3$

**Resolución:** aplicando primeramente la regla de la cadena se obtiene

$$\Rightarrow f'(x)=(x^2+1)^3=3(x^2+1)^{3-1}(2x+0)=6x(x^2+1)^2$$

Aplicando ahora la regla para el producto de funciones

$$\Rightarrow f''(x)=(6)(x^2+1)^2+(6x)\left[2(x^2+1)(2x)\right]=6(x^2+1)^2+24x^2(x^2+1)=6(x^2+1)(5x^2+1)$$

**Ejemplo 14:** La aceleración $a$ de un cuerpo cuya ecuación de movimiento es $s=s(t)$ esta definida por $a=s''(t)$. Calcular la velocidad y la aceleración instantánea a los 3 segundos de un cuerpo que se mueve en línea recta según la función $s(t)=t^3-8t^2+10$.

**Resolución:**

$$s(t)=t^3-8t^2+10 \Rightarrow \dot{v}(t)=s'(t)=3t^2-16t \Rightarrow a=s''(t)=6t-16$$

De donde: $\dot{v}(3)=3(3)^2-16(3)=-21$ m/s y $\Rightarrow a=6(3)-16=2$ m/s$^2$

### *Derivación implícita*

Anteriormente solo hemos estado derivando funciones que están definidas explícitamente, es decir cuando se dan en la forma $y = f(x)$; esto es cuando se da $y$ despejada en términos de $x$. Por ejemplo: $y = 4x^2 - 2x^2 + 5$.

Sin embargo, en algunos problemas puede ser conveniente derivar una función contenida implícitamente en una relación o ecuación, como por ejemplo, $x^2 + y^2 = 9$, sin necesidad de despejar previamente la variable independiente. Hay casos donde en una misma ecuación puede haber implícitamente más de una función.

En estos casos se dice que $y$ es una función que está definida implícitamente por la ecuación, y su proceso de derivación se conoce como ***derivación implícita***, el cual queda ejemplificado a continuación.

**Ejemplo 15:** Calcula la derivada de $x^2 + y^2 = 9$.

**Resolución:** Primeramente suponemos que existe $y = f(x)$ en la ecuación y que además es derivable respecto a la variable independiente. Posteriormente se calcula la derivada de ambos miembros de la igualdad con respecto a la variable independiente, y finalmente se despeja la función derivada en la ecuación resultante. O sea:

$$x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(9) \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(9)$$

$$\Rightarrow 2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \qquad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

**Nota:** Observar que para derivar $y^2$ se uso la regla de la cadena.

Este ejemplo también puede resolverse de esta otra manera si despejamos primero la variable independiente.

$$x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow \quad y^2 = 9 - x^2 \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{9 - x^2}$$

Sin embargo, aquí debemos observar que en la ecuación dada lo que se tiene en realidad son dos funciones implícitas: $y_1 = \sqrt{9 - x^2}$ y $y_2 = -\sqrt{9 - x^2}$.

Derivando cada una ellas por separado se obtiene

$$y_1 = \sqrt{9 - x^2} = (9 - x^2)^{1/2} \Rightarrow \frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2}(9 - x^2)^{-1/2}(-2x)$$

$$= -x(9 - x^2)^{-1/2} = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2}} = -\frac{x}{y_1}$$

$$y_2 = -\sqrt{9-x^2} = -(9-x^2)^{1/2} \Rightarrow \frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{2}(9-x^2)^{-1/2}(-2x)$$

$$= x(9-x^2)^{-1/2} = \frac{-x}{-\sqrt{9-x^2}} = -\frac{x}{y_2}$$

**Ejemplo 16:** Determina la ecuación de la recta tangente a la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

en el punto $P_0\left(3, \frac{16}{5}\right)$.

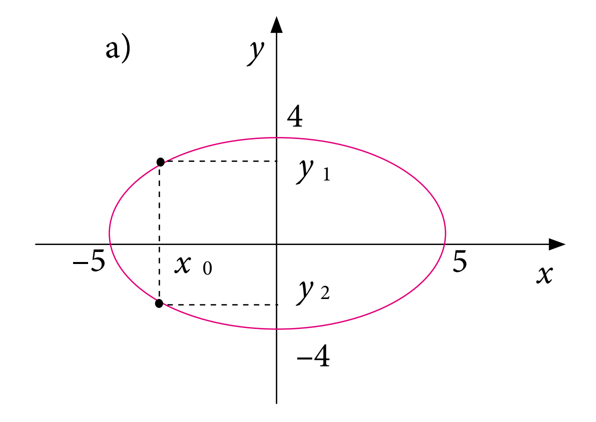
**Resolución:** Derivando implícitamente la ecuación

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}\right) = \frac{d}{dx}(1) \Rightarrow \frac{2}{25}x + \frac{2}{16}y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{16x}{25y}$$

Por tanto, en el punto dado la pendiente de la curva, que es igual a la pendiente de la recta tangente a dicho punto, es : $m = \frac{dy}{dx} = \frac{16x}{25y} = \frac{16(3)}{25(16/5)} = -\frac{3}{5}$

De donde la ecuación de su tangente es: $y - \frac{16}{5} = -\frac{3}{5}(x-3) \Rightarrow y = -\frac{3}{5}x + 5$.

Otra forma de resolver es considerar que la elipse no es el gráfico de una función, pues rectas paralelas al eje “Y” la cortan en dos puntos, es decir, existen puntos con dos imágenes (fig 3.3a).



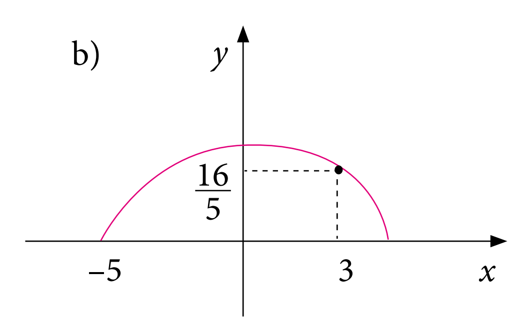




Figura 3.3

Y como $y_0 = \frac{16}{5} > 0$, consideraremos la curva $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ con $y \geq 0$ (fig. 3.3b).

Esta semielipse sí representa una función.

La ecuación de esta función, en forma explícita se obtiene despejando de la ecuación de la elipse

$$\frac{y^2}{16} = 1 - \frac{x^2}{25} \Rightarrow y^2 = \frac{16}{25}(25 - x^2) \Rightarrow y = \pm\frac{4}{5}\sqrt{25 - x^2}$$

Como $y \geq 0$, entonces $y = \frac{4}{5}\sqrt{25 - x^2}$. Esta es la ecuación de la semielipse que nos interesa. Derivando se obtiene:

$$y' = \frac{4}{5} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}} = \frac{-4x}{5\sqrt{25 - x^2}}$$

Haciendo $x = 3$ se obtiene: $m = y'(3) = \frac{-12}{5\sqrt{25 - 9}} = \frac{-12}{5\sqrt{16}} = -\frac{3}{5}$

El cual es el mismo valor obtenido mediante derivación implícita. Por tanto la ecuación general de la recta tangentes es: $3x + 5y - 25 = 0$. La que es equivalente a la anterior.

**Ejemplo 17:** Determina la ecuación de la tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ en el punto $P_0(5, y_0)$, si $y_0 < 0$.

**Resolución:** Derivando implícitamente la ecuación

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16}\right) = \frac{d}{dx}(1) \Rightarrow \frac{2}{9}x - \frac{2}{16}y\,\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{16x}{9y}$$

Evaluando $y_0$ para $x$=5 y considerando que $y_0 < 0$: $\frac{(5)^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow y = -\frac{16}{3}$ :

Por tanto en el punto dado la pendiente de la curva, que es igual a la pendiente de la recta tangente a dicho punto, será: $m = \frac{dy}{dx} = -\frac{16x}{9y} = \frac{16(5)}{9(-16/3)} = -\frac{5}{3}$

De donde su ecuación es: $y - \left(-\frac{16}{3}\right) = -\frac{5}{3}(x - 5) \Rightarrow 5x + 3y - 9 = 0$.

Otra forma de resolverse, al igual que en la elipse, es considerar que la hipérbola no es el gráfico de una función, pues existen puntos con dos imágenes (fig. 3 .4a).

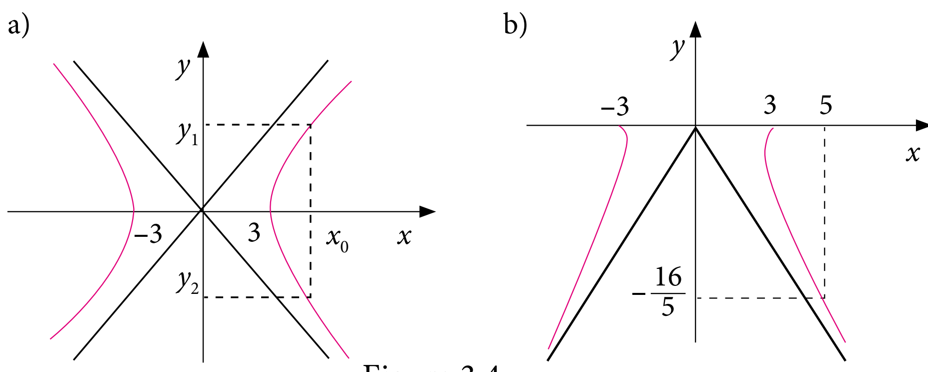



Figura 3.4

Despejando en la ecuación de la hipérbola:

$$\frac{y^2}{16} = \frac{x^2}{9} - 1 \Rightarrow y^2 = \frac{16}{9}(x^2 - 9) \Rightarrow y = \pm\frac{4}{3}\sqrt{x^2 - 9}$$

Evaluando en $x_0$=5 y teniendo en cuenta que $y_0$<0 se obtiene:

$$y_0 = \frac{4}{3}\sqrt{25 - 9} = -\frac{16}{3}.$$

Consideramos la curva $y = -\frac{4}{3}\sqrt{x^2 - 9}$ (fig. 3.4b).

Derivando: $y' = -\frac{4}{3} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 9}} = \frac{-4x}{3\sqrt{x^2 - 9}}$

Evaluando para $x_0 = 5$ obtenemos $y'(5) = \frac{-20}{3\sqrt{25 - 9}} = -\frac{5}{3}$ .

Entonces la recta tangente tiene pendiente $m = -\frac{5}{3}$ y pasa por el punto $\left(5, -\frac{16}{3}\right)$.

De donde, su ecuación es: $y = -\frac{5}{3}x + 3$ .

**Ejemplo 18:** Determina la ecuación de la recta tangente a la curva definida por la ecuación $x^3 + y^3 - 6xy = 0$, en el punto $P(3, 3)$.

**Resolución:** Derivando implícitamente la ecuación

$$x^3 + y^3 - 6xy = 0 \Rightarrow x^3 + y^3 = 6xy$$

$$\frac{d}{dx}(x^3 + y^3) = \frac{dy}{dx}(6xy) \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 6\left[1 \cdot y + x\frac{dy}{dx}\right]$$

$$\Rightarrow 3y^2\frac{dy}{dx} - 6x\frac{dy}{dx} = 6y - 3x^2 \cdot \Rightarrow (3y^2 - 6x)\frac{dy}{dx} = 6y - 3x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{6y - 3x^2}{3y^2 - 6x} = \frac{3(2y - x^2)}{3(y^2 - 2x)} = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

Por tanto en $P(3, 3)$ la pendiente de la curva que es igual a la pendiente de la recta tangente a dicho punto es:

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x} = \frac{2(3) - (3)^2}{(3)^2 - 2(3)} = \frac{-3}{3} = -1$$

De donde su ecuación es: $y - 3 = -1(x - 3) \Rightarrow x + y - 6 = 0 \Rightarrow y = -x + 6.$

## ***ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE:***



**Act-28)** Determina la segunda derivada de la función.

a) $y = 8x^4 - 6x + 5\sqrt{x}$

b) $f(x) = x^2\,(x^4+7)$

c) $y = \dfrac{2x}{x+2}$

d) $f(t) = \dfrac{5t-2}{3}$

e) $g(x) = \dfrac{1}{120}x^5 - \dfrac{1}{24}x^4$

f) $y = (x^2-2)(x^2+3)$

g) $y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$

h) $h(r) = \dfrac{1-r}{1+r}$

**Act-29)** Verifica que si $y = \dfrac{x}{x-1}$, entonces se cumple que:

$$y'' + y' + \frac{2x+4}{(x-1)^3} = \frac{y}{x(x-1)}$$

**Act-30)** Determina la derivada indicada.

a) $y = 12x^5 - \dfrac{3}{4}x^4 - x^2$ Tercera derivada: $y^{(3)}$

b) $y = \dfrac{1}{x}$ Cuarta derivada: $y^{(4)}$

c) $y = 5x^2 + \dfrac{3}{x}$ Sexta derivada: $y^{(6)}$

**Act-31)** Calcula la tercera derivada de la función:

a) $f(x) = x^2(3x+1)^3$

b) $y = \sqrt{\dfrac{x}{2x+1}}$

**Act-32)** Calcula la velocidad y la aceleración instantánea a los 3 segundos de un cuerpo que se mueve en línea recta según la función de movimiento $s(t) = t^2 + \sqrt{t} + 5$, donde $s$ y $t$ se miden en metros y segundos respectivamente.

**Act-33)** Determina mediante derivación implícita la primera derivada de las siguientes ecuaciones.

a) $3x^2 + 3y^2 = 15$

b) $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$

c) $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{25} = 1$

d) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

e) $x^2 + xy - 2y^2 - 4 = 0$

f) $(x+y)^3 = (x-y)^2$

g) $x^2 + xy + y^2 + x + y = 0$

h) $(x^2 + 4 + y^2)^2 = 16x^2 + 36$

**Act-34)** Determina la ecuación de la tangente a la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ en el punto $(2\,,y)$ con $y > 0$.

**Act-35)** Determina la ecuación de la tangente a la hipérbola $25x^2 - 36\,y^2 = 900$ en el punto $(5, y)$ con $y < 0$.

**Act-36)** Determina las ecuaciones de las tangentes, con pendiente $m = -\dfrac{2}{9}$ , a la elipse $16x^2 + 9y^2 = 144$.

**Act-37)** Determina las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $x^2+y^2=25$ que son paralelas a la recta $4x + 3y = 12$.

**Act-38)** Determina en el punto $P\,(2, \sqrt{2})$ la ecuación de la recta tangente a la curva cuya ecuación es $(x^2 + 4 + y^2)^2 = 16x^2 + 36$.

**Act-39)** Demuestra que las hipérbolas $xy = 1$ y $x^2 - y^2 = 1$ son ortogonales, es decir, el ángulo de intersección de esas dos curvas es recto.

**Act-40)** Determina los puntos de la curva cuya ecuación es $x^2 - 4x = 4y - y^2$, donde la recta tangente es horizontal.

**Act-41)** Determina en el punto $P\,(4, 1)$ las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva cuya ecuación es $xy^2 = 6 - \sqrt{5 - y}$ .

**Act-42)** Determina en el punto $P\,(1, 1)$ las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva cuya ecuación es $xy(2x^2 + 3y^2) - 5 = 0$.

## *3.4. Derivación de las funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales*

Las funciones elementales a las cuales les hemos estado calculando derivadas se llaman en general funciones algebraicas. Para completar las reglas de derivación de las funciones elementales nos falta un grupo de ellas denominadas funciones trascendentes, entre las cuales están las funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales.

***Derivadas de las funciones trigonométricas***

Las funciones trigonométricas ***seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente*** son derivables en todo su dominio y se cumplen las siguientes reglas del ***teorema 4.***

**Teorema 4**

1. $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$
2. $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$
3. $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$
4. $(\csc x)' = -\csc x \cot x$
5. $(\sec x)' = \sec x \tan x$
6. $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\csc^2 x$

Para demostrar este teorema de nuevo se usa la definición de derivada, la regla de los 5 pasos y algunas identidades trigonométricas ya conocidas. De esta manera a continuación se demuestran las tres primeras reglas o fórmulas.

**Demostración:**

1. Sea $y = \text{sen}\, x$. De la definición de derivada, abreviando algunos pasos y usando ahora $\Delta x$ en lugar de $\boldsymbol{h}$ se tiene que:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}(x+\Delta x) - sen\ x}{\Delta x}$$

Aplicando la identidad $sen\ (a+b) = sen\ a \cos b + \cos a\ sen\ b$ y algunas propiedades de los límites de funciones:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\text{sen}(x+\Delta x) - \text{sen}\, x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\text{sen}\, x \cos \Delta x + \cos x\, \text{sen}\, \Delta x - \text{sen}\, x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{-\text{sen}\, x\, [1-\cos \Delta x]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\cos x\, \text{sen}\, \Delta x}{\Delta x}$$

$$= \left(\lim_{\Delta x\to 0} (-\text{sen}\, x)\right)\left[\lim_{\Delta x\to 0} \frac{[1-\cos \Delta x]}{\Delta x}\right] + \left(\lim_{\Delta x\to 0} (\cos x)\right)\left(\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\text{sen}\, \Delta x}{\Delta x}\right)$$

Recordando de la unidad de aprendizaje 1 que:

$$\boxed{\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\text{sen}\, \Delta x}{x} = 1} \quad \text{y} \quad \boxed{\lim_{\Delta x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0}$$

Y calculando los límites se obtiene finalmente que:

$$f'(x) = (-\text{sen}\, x)(0) + (\cos x)(1) = \cos x$$

2. Para demostrar que $(\cos x)' = -\, sen\ x$ se partirá de la identidad fundamental $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. A partir de ellas, despejando $\cos x$ se tiene que:

$$\cos x = \pm \sqrt{1-\text{sen}^2 x}$$

Derivando en ambos miembros de la igualdad anterior aplicando la regla de la cadena se tiene que:

$$(\cos x)' = \pm\left(\frac{(1-\text{sen}^2 x)'}{2\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}\right) = \left(\frac{-2\text{sen} x \cdot \cos x}{2\left(\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}\right)}\right) = \left(\frac{-2\text{sen} x \cdot \cos x}{2(\cos x)}\right) = -\text{sen}\, x$$

3. Para demostrar que $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$ se puede hacer de varias maneras, por ejemplo usando la definición de tangente y la regla para derivar un cociente.

En este caso se tiene que:

$$(\tan x)' = \left(\frac{\text{sen } x}{\cos x}\right)' = \frac{(\text{sen } x)' \cdot \cos x - \text{sen} x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x + \text{sen} x \cdot \text{sen } x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

**Ejemplo 19:** Deriva las siguientes funciones

a) $y = x^2 \text{sen } x$ b) $y = \text{sen } x \cdot \cos x$ c) $y = \frac{\tan x}{x}$

**Resolución:**

a) Aplicando primero la regla del producto a $y = x^2 \text{ sen } x$ se obtiene:

$\Rightarrow y' = (x^2)'(\text{sen } x) + (x^2)(\text{sen } x)' = 2x \text{ sen } x + x^2 \cos x$

b) Aplicando la regla del producto a $y = \cos x \text{ sen } x$ se obtiene:

$$\Rightarrow y' = (\cos x)' (\text{sen } x) + (\cos x)(\text{sen } x)'$$
$$= -\text{sen } x \text{ sen } x + \cos x \cos x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = \cos 2x$$

c) Aplicando primero la regla del cociente a $y = \frac{\tan x}{x}$ se obtiene:

$$\Rightarrow y' = \frac{(\tan x)'(x) - (\tan x)(x)'}{x^2} = \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)(x) - (\tan x)(1)}{x^2} = \frac{\frac{x}{\cos^2 x} - \frac{\text{sen } x}{\cos x}}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{x - \text{sen } x \cdot \cos x}{\cos^2 x}}{x^2}$$

$$= \frac{x - \text{sen } x \cdot \cos x}{x^2 \cos^2 x}$$

**Ejemplo 20:** Determina la derivada de las siguientes funciones

a) $y = \text{sen}(3x^2 + x + 1)$ b) $y = \cos(x^3 + 1)^2$ c) $y = \tan\sqrt{x}$ d) $y = \sec(5x^2 + x)$

**Resolución:** observar que en los cuatro casos se trata de una composición de funciones, por lo tanto hay que empezar aplicando la regla de la cadena

a) $y' = \left[\cos(3x^2 + 2x + 1)\right](3x^2 + 2x + 1)' = \left[\cos(3x^2 + 2x + 1)\right](6x + 2)$

b) $y' = \left[-\text{sen}(x^3 + 1)^2\right]\left((x^3 + 1)^2\right)' = \left[-\text{sen}(x^3+1)^2\right]\left[2(x^3 + 1)(3x^2)\right]$

$= -6x^2(x^3 + 1)\left[\text{sen}(x^3+1)^2\right]$

c) $y' = \dfrac{1}{\cos^2\sqrt{x}}(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{\cos^2\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\cdot\cos^2\sqrt{x}}$

d) $y' = \left[\sec(5x^2 + x)\ .\ \tan(5x^2 + x)\right](5x^2 + x)'$
$= (10x+1)\left[\sec(5x^2 + x)\cdot\tan(5x^2 + x)\right]$

Las funciones trigonométricas inversas también son derivables, sin embargo, antes de estudiar su derivabilidad es conveniente estudiar el siguiente teorema 5 para las funciones inversas:

**Teorema 5:** Si las funciones $y = f(x)$ y $x = g(y)$ son inversas una de la otra y ambas son derivables, entonces se cumple:

$$[f(x)]' = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

**Demostración:** Como $y = f(x)$ y $x = g(y)$ son funciones inversas, se tiene que $y = f(x) = f(g(y))$. Derivando implícitamente ambos miembros de esta igualdad y usando la regla de la cadena se obtiene:

$$1 = [f(g(y))]' = f'(g(y))\cdot g'(y) \quad \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$$

**Ejemplo 21:** Determina la derivada de $y = f(x)$ si se sabe que es función inversa de $g(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$.

**Resolución:** Observa que $g(x) = \frac{5}{9}(x - 32) \Leftrightarrow g(y) = \frac{5}{9}(y - 32)$.

Por tanto: $f'(x) = \dfrac{1}{g'(y)} = \dfrac{1}{((5/9)(y - 32))'} = \dfrac{1}{(5/9)} = \dfrac{9}{5}$

Podemos verificar este resultado determinando primero $y=f(x)$ a partir de su inversa y después calculando su derivada, tal como se hace a continuación:

Despejando ***y*** de $g(y) = \frac{5}{9}(y-32) = x$ ,se obtiene, $y = \frac{9}{5}x + 32$ cuya derivada es:

$f'(x) = ((9/5)x + 32)' = \frac{9}{5}$ , la cual coincide con la anterior.

Ahora ya estamos en posibilidades de estudiar el siguiente ***teorema 6*** para las funciones trigométricas inversas y el cual demostraremos parcialmente:

**Teorema 6:** En la funciones trigonométricas inversas se cumplen las siguientes reglas de derivación.

7. $(\text{arc sen } x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad ; x \in (-1,1) \Rightarrow -1 < x < 1$

8. $(\text{arc cos } x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad ; x \in (-1,1) \Rightarrow -1 < x < 1$

9. $(\text{arc tan } x)' = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad ; x \in \Re$

10. $(\text{arc cot } x)' = \frac{-1}{1+x^2}$ $\quad ; x \in \Re$

11. $(\text{arc sec } x)' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ $\quad ; x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \Rightarrow |x| > 1$

12. $(\text{arc csc } x)' = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ $\quad ; x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \Rightarrow |x| > 1$

**Demostración para** $y = \text{arc sen } x$:

Sea $y = \text{arc sen } x$ y su función inversa $x = \text{sen } y$, donde, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ .

Aplicando el teorema 5 para derivar $y = \text{arc sen } x$, se obtiene que:

$$(\text{arc sen } x)' = \frac{1}{(\text{sen } y)'} = \frac{1}{\cos y}$$

Aplicando la identidad: $\cos^2 y + \text{sen}^2 y = 1 \;\Rightarrow\; \cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$

Se concluye que: $(\text{arc sen } x)' = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ; $-1 < x < 1$

**Demostración para** $y = \text{arc cot } x$ :

Sea $y = \text{arc cot } x$ y su función inversa $x = \cot y$, donde, $0 < y < \pi$.

Aplicando el teorema 5 para derivar $y = \text{arc cot } x$, se obtiene que:

$$(\text{arc cot } x)' = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{-\csc^2 y}$$

Aplicando la identidad: $\csc^2 y = 1 + \cot^2 y \;\Rightarrow\; \csc^2 y = 1 + x^2$

Se concluye que: $(\text{arc cot } x)' = \dfrac{1}{-\csc^2 y} = \dfrac{-1}{x^2 + 1}$ ; $x \in \Re$

**Ejemplo 22:** Deriva las siguientes funciones

a) $y = \text{arc sen } 6x^4$ b) $y = \text{arc tan } 3\sqrt{x}$ c) $y = \text{arc sen}(7x - 2)$

**Resolución:** (a) Observa que se tiene una función compuesta por $y = \text{arc sen } v$ donde $v(x) = 6x^4$. Por tanto aplicando primero la regla de la cadena se obtiene

$$\Rightarrow y' = (\text{arc sen } v)' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\,(v)' = \frac{1}{\sqrt{1-(6x^4)^2}}(6x^4)' = \frac{24x^3}{\sqrt{1-36x^8}}$$

b) Procediendo de manera semejante al inciso anterior considerando ahora que $v(x) = 3\sqrt{x}$ :

$$\Rightarrow y' = (\text{arc tan } v)' = \frac{1}{1+v^2}\,(v)' = \frac{1}{1+(3\sqrt{x})^2}\,(3\sqrt{x})' = \frac{1}{1+9x}\left(\frac{3}{(2\sqrt{x})}\right) = \frac{3}{2\sqrt{x}(1+9x)}$$

c) De igual manera que en los dos anteriores, pero ahora con $v(x) = 7x - 3$:

$$\Rightarrow y' = (\text{arc sec } v)' = \frac{1}{|v|\sqrt{v^2-1}}\,(v)'$$

$$= \frac{1}{|7x-2|\sqrt{(7x-2)^2-1}}\,(7x-2)' = \frac{7}{|7x-2|\sqrt{49x^2-28x+3}}$$

***ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE:***

**Act-43)** Demuestra las siguientes reglas o fórmulas de derivación:

a) $(\csc x)' = -\csc x \cot x$

b) $(\sec x)' = \sec x \tan x$

c) $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\csc^2 x$

d) $(\operatorname{arc}\cos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ ; $x \in (-1,1) \Rightarrow -1 < x < 1$

e) $(\operatorname{arc}\tan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ ; $x \in \Re$

f) $(\operatorname{arc}\sec x)' = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ ; $x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty) \Rightarrow |x| > 1$

g) $(\operatorname{arc}\csc x)' = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ ; $x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty) \Rightarrow |x| > 1$

**Act-44)** Deriva las siguientes funciones.

a) $y = 3\operatorname{sen} x - 2\sec x$

b) $y = \dfrac{\cos^3 x}{3} + 5\csc x$

c) $y = x^2 \tan x - 4\cot x$

d) $y = \sqrt{2}\tan x - \operatorname{sen} x$

e) $y = \operatorname{sen} x + \cos(5-3x) - 6x^3$

f) $y = \operatorname{sen} 5x \cdot \tan 4x$

g) $y = \cos x \tan x + \dfrac{\operatorname{sen} x}{\tan x}$

h) $y = \operatorname{sen}(x^4 - x^2)^2$

i) $y = \operatorname{sen}(6x+2) \cdot \cos(2x-1)$

j) $y = \cos^2 5x \cdot \cot 2x$

k) $y = \dfrac{\cos x}{x} - \sqrt{x}\operatorname{sen} 8x + \dfrac{2}{x^2}$

l) $y = \operatorname{sen}^2 3x - \cos^3 2x$

m) $y = \operatorname{arc}\cos 3x^5$

n) $y = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$

ñ) $y = \operatorname{arc}\operatorname{sen}(10x-3)$

o) $y = \operatorname{arc}\cot\sqrt{x+1}$

p) $y = x^2 \cdot \operatorname{arc}\tan 3x$

q) $y = \operatorname{arc}\sec(x+1)$

r) $y = (1+\operatorname{sen} 2x)^3$

s) $y = \operatorname{arc}\csc(x^2-4x)$

t) $y = (\operatorname{arc}\operatorname{sen} 6x)^2$

u) $y = \operatorname{arc}\cot\left(\dfrac{3x}{1-x}\right)$

**Act-45)** Calcula el valor de la pendiente de la curva $y=f(x)$ en el punto de abscisa indicada.

a) $y = 5 \tan x$ $\qquad x_o = \frac{\pi}{4}$

b) $y = 2 \text{ sen } x + \frac{1}{3} \cos x$ $\qquad x_o = 0$

c) $y = \frac{\text{sen } x}{x^2}$ $\qquad x_o = \frac{\pi}{2}$

d) $y = x^3 \cos x$ $\qquad x_o = 0$

e) $y = 2 \tan x - \frac{1}{4} \cos x$ $\qquad x_o = \frac{\pi}{8}$

f) $f(x) = 3x \text{ sen } x$ $\qquad x_o = \frac{5\pi}{18}$

g) $y = \cos^2 x$ $\qquad x_o = \frac{\pi}{9}$

**Act-46)** Prueba que la derivada de:

a) $y = \text{sen } 2x$ puede expresarse como: $y' = 2\,(2\cos^2 x - 1)$.

b) $y = \cos 2x$ puede expresarse como: $y' = -4 \text{ sen } x \cos x$

c) $y = \cos^2 x$ puede expresarse como: $y' = -\text{sen } 2x$

**Act-47)** En qué puntos tiene derivada nula la curva

a) $y = 2 \text{ sen } x + \cos 2x$ $\qquad$ b) $y = 2 \text{ sen}^2 x + 3 \cos^2 x$

**Act-48)** ¿En qué puntos la tangente al gráfico de la función $y = \text{sen } x$ tiene pendiente $m=1$?

**Act-49)** Escribe la ecuación de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto indicado:

a) $y = \text{sen } x$ $\quad (\pi, 0)$ $\qquad$ b) $y = \cos 2x$ $\quad \left(\frac{\pi}{2}, -1\right)$

c) $y = x^2 \text{sen } \frac{1}{x}$ $\quad \left(\frac{1}{\pi}, 0\right)$ $\qquad$ d) $y = \tan 3x$ $\quad \left(\frac{\pi}{15}, 0.726\right)$

e) $y = 2x \cos x$ $\quad \left(\frac{\pi}{12}, 0.506\right)$

**Act-50)** Determina la derivada de segundo orden de la función:

a) $y = \text{sen}^2 x$ $\qquad$ b) $y = x \cdot \tan x$ $\qquad$ c) $y = \text{arc sen } x$

**Act-51)** Mediante derivación implícita determina $\frac{dy}{dx}$ de:

a) $x + y = \text{sen}\, y \cdot \cos x$    b) $xy = \tan y$

***Derivada de las funciones logarítmicas y exponenciales***

Ya para concluir el estudio de las derivadas de la funciones elementales nos faltan las funciones logarítmicas y exponenciales, la cuales estudiamos a continuación a través del siguiente teorema.

**Teorema 7:** Las funciones logarítmicas y exponenciales son derivables y sus derivadas son

i) $(ln\, x)' = \frac{1}{x}$ ; $x > 0$

ii) $(e^x)' = e^x$

iii) $(log_a\, x)' = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{(ln\, a)x}$

iv) $(a^x)' = ln\, a \cdot a^x$

donde: $x \in \Re$ , $x > 0$ , $a > 0$ , $a \neq 1$

**Demostración (opcional) para** $(log_a x)' = \frac{log_a e}{x}$ :

Sea la función logarítmica $y = log_a x$ con $y \in \Re$ ; $x > 0$ con . A partir de la definición de derivada se tiene que:

$$(log_a\, x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{log_a(x + \Delta x) - log_a x}{\Delta x}$$

Aplicando las siguientes propiedades de los logaritmos estudiadas en la unidad 1:

$$log_a\left(\frac{b}{c}\right) = log_a(b) - log_a(c) \qquad log_a(b)^n = n \cdot log_a(b)$$

Se obtiene:

$$(log_a x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{log_a(x + \Delta x) - log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{log_a\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{1}{\Delta x} log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{x}{x} \cdot \frac{1}{\Delta x}\, log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x}\, log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{1}{x} \cdot log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]$$

Considerando ahora que

$\frac{\Delta x}{x} = w \Rightarrow$ Para un valor dado de $x$, si $\Delta x \to 0 \Rightarrow w \to 0$, de donde:

$$(log_a x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{1}{x} \cdot log_a \left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right] = \lim_{w \to 0} \left[\frac{1}{x} \cdot log_a (1+w)^{\frac{1}{w}}\right]$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \lim_{w \to 0} \left[log_a (1+w)^{\frac{1}{w}}\right] = \frac{1}{x} \cdot log_a \left[\lim_{w \to 0} (1+w)^{\frac{1}{w}}\right] \quad \text{(Por propiedad de límites)}$$

Y recordando (Ver unidad 1) que $\lim_{w \to 0} (1+w)^{\frac{1}{w}} = e$ , se obtiene finalmente que:

$$(log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot log_a \left[\lim_{w \to 0} (1+w)^{\frac{1}{w}}\right] = \frac{1}{x} \cdot log_a e = \frac{1}{x} \cdot \frac{ln\, e}{ln\, a} = \frac{1}{(ln\, a)x}$$

tal como se quería demostrar.

En el caso particular en que la base $a = e$, se obtiene:

$$(log_a x)' = (log_e x)' = (ln\, x)' = \frac{1}{x} \cdot log_e e = \frac{1}{x} \cdot ln\, e = \frac{1}{x}$$

**Demostración para** $(a^x)' = ln\, a \cdot a^x$:

Sea la función exponencial $y = a^x$ con ; $a > 0$. Sacando el logaritmo natural a ambos miembros de esta igualdad se obtiene:

$$y = a^x \Leftrightarrow ln\, y = ln\, a^x \Leftrightarrow ln\, y = x\, ln\, a$$

Derivando implícitamente esta última expresión con respecto a $x$ se obtiene lo que se quiere demostrar:

$$\frac{d}{dx}(ln\, y) = \frac{d}{dx}(x \cdot ln\, a) \Rightarrow \frac{y'}{y} = (1)(ln\, a)$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = (a^x)' = (y)(ln\, a) = (a^x)(ln\, a)}$$

En el caso particular que la base es el **número de Euler**, o sea, cuando a=$e$=2.71828182846..., se obtiene:

$$\boxed{y' = (e^x)' = (e^x)(ln\, e) = (e^x)(1) = e^x}$$

Con lo cual queda terminada la demostración del teorema 7.

**Ejemplo 23:** Deriva las siguientes funciones:

a) $y = log_2(3x + 1)$ b) $y = log(x^2 + 4x)$ c) $y = ln(4x^2)$ d) $y = x^2\ ln\ x$

**Resolución:**

a) Observar primero que en los cuatro casos se tiene una composición de funciones, por tanto tendrá que aplicarse la regla de la cadena. Así que la derivada de la función logarítmica $y = log_2(3x + 1)$ es:

$$y' = \left(log_2(3x + 1)\right)' = \frac{log_2 e}{3x+1}\,(3x + 1)' = \frac{log_2 e}{3x+1}(3) = \frac{3 \cdot log_2 e}{3x+1} \Rightarrow \left(y' = \frac{3}{(ln2)(3x+1)}\right)$$

b) La derivada de la función logarítmica $y = log\,(x^2 + 4x)$ será:

$$y' = \left(log(x^2 + 4x)\right)' = \frac{log\ e}{x^2+4x}\,(x^2 + 4x)' = \frac{log\,e}{x^2+4x}(2x + 4)$$

$$= \frac{(log\,e)(2x+4)}{x^2+4x} = \quad \Rightarrow \left(y' = \frac{2x + 4}{(ln10)(x^2+4x)}\right)$$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \left(ln(4x^2)\right)' = \dfrac{1}{4x^2}\,(4x^2)' = \dfrac{1}{4x^2}\,(8x) = \dfrac{2}{x}$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \left(x^2\ ln\ x^3\right)' = (x^2)'\left(lnx^3\right) + \left(x^2\right)\left(lnx^3\right)'$

$$= (2x)\left(lnx^3\right) + \left(x^2\right)\left(\frac{3x^2}{x^3}\right) = (2x)\left(lnx^3\right) + 3x = x\left(2ln\ x^3 + 3\right)$$

**Ejemplo 24:** Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = ln(5x - 1)$ b) $y = ln\,(3x - x^2)$ c) $y = ln\ \text{sen}\ x$

**Resolución:**

a) $f'(x) = \dfrac{1}{5x - 1} \cdot (5x - 1)' = \dfrac{1}{5x - 1}\,(5) = \dfrac{5}{5x - 1}$

b) $y'(x) = \dfrac{1}{3x - x^2} \cdot (3x - x^2)' = \dfrac{1}{3x - x^2} \cdot (3 - 2x) = \dfrac{3 - 2x}{3x - x^2}$

c) $= (ln\ \text{sen}\ x)' = \dfrac{1}{\text{sen}\ x} \cdot (\text{sen}\ x)' = \dfrac{1}{\text{sen}\ x} \cdot \cos x = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\ x} = \cot x$

**Ejemplo 25:** Deriva las siguientes funciones:

a) $y = e^{2x}$ b) $y = x\, e^{2x}$ c) $y = e^{x}\,\text{sen}^{x}$ d) $y = e^{\sqrt{2x+5}}$

**Resolución:**

a) Sea $v = 2x$ , entonces, $y = e^{2x} = e^{v}$ $\Rightarrow f(v(x)) = e^{v}$ . Aplicando la regla de la cadena: $\left(f(v(x))\right)' = \left(f(v(x))\right)'\left(v(x)\right)' = \left(e^{v}\right)'\left(2x\right)' = e^{v}(2) = 2e^{2x}$.

También se puede calcular directamente como: $\left(e^{2x}\right)' = e^{2x}(2x)' = e^{2x}(2) = 2e^{2x}$.

b) $y' = \frac{d}{dx}\left(x\, e^{2x}\right) = \frac{d}{dx}(x)\cdot e^{2x} + x\cdot\frac{d}{dx}\left(e^{2x}\right) = (1)e^{2x} + x\left(2e^{2x}\right) = (1 + 2x)e^{2x}$

c) $\frac{d}{dx}\left(e^{x}\cdot \text{sen}\, x\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{x}\right)\cdot \text{sen}\, x + e^{x}\cdot\frac{d}{dx}(\text{sen}\, x)$

$= e^{x}\cdot \text{sen}\, x + e^{x}\cdot \cos x = e^{x}\,(\text{sen}\, x + \cos x)$

d) $\frac{d}{dx} = e^{\sqrt{2x+5}}\cdot\left(\sqrt{2x+5}\right)' = e^{\sqrt{2x+5}}\cdot\ \frac{(2x+5)'}{2\sqrt{2x+5}} = \frac{e^{\sqrt{2x+5}}}{\sqrt{2x+5}}$

Ya conoces que la derivada de la función $y = x^{n}$ con $n$ natural es $y' = nx^{n-1}$. La regla para derivar la función exponencial permite extender esta regla a exponentes reales tal como se establece en el ***teorema 8***.

**Teorema 8:** Las funciones exponenciales $y = x^{k}$ de exponente real $(k \in \Re)$ y base positiva $(x > 0)$ son derivables y se cumple que $\frac{d}{dx}\left(x^{k}\right) = k\, x^{k-1}$.

Observa que este teorema generaliza la regla para derivar que has ido aprendiendo poco a poco, desde las potenciales (exponente natural, entero, racional) hasta las exponenciales de exponente real que incluye a todas las anteriores. Observa que **la regla para derivar siempre es la misma.**

**Demostración:** Sea $y = x^{k}$ , $x > 0$ , $k \in \Re$. Entonces:

$y = x^{k} \Leftrightarrow ln\, y = ln^{k} = k\, ln\, x \Leftrightarrow y = e^{k\, ln\, x}$ (Por definición de logaritmo)

Aplicando la regla de la cadena

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{k\, ln\, x}\right) = e^{k\, ln\, x}\frac{dy}{dx}\left(k\, ln\, x\right) = e^{k\, ln\, x}\left(\frac{k}{x}\right) = \frac{ky}{x} = \frac{kx^{k}}{x} = kx^{k-1}$

como se quería probar.

**Ejemplo 27:** Deriva las siguientes funciones:

a) $y = 2x^{3/4}$ b) $y = x^{\sqrt{2}} + \sqrt[3]{x}$ c) $y = e^{\sqrt[5]{x^2}}$

**Resolución:**

a) $\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1}\right) = \frac{6x^{-\frac{1}{4}}}{4} = \frac{3}{2x^{1/4}} = \frac{3}{2\sqrt[4]{x}}$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^{\sqrt{2}} + \sqrt[3]{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{\sqrt{2}}\right) + \frac{d}{dx}\left(x^{1/3}\right) = \sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{3}x^{(1/3)-1} = \sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{\sqrt[5]{x^2}}\right) = e^{\sqrt[5]{x^2}}\frac{d}{dx}\left(\sqrt[5]{x^2}\right) = e^{\sqrt[5]{x^2}}\left(\frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1}\right) = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}\,e^{\sqrt[5]{x^2}}$

***ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE:*** 

**Act-52)** Deriva las siguientes funciones:

a) $y = e^x \ln(x+1)$

b) $y = \ln 2x + 3e^{9x}$

c) $y = \log(3x+1)$

d) $y = \ln\left(3x^2 + 1\right)$

e) $y = \ln\left(5x^2 - x + 1\right)$

f) $y = \ln\left(\frac{1-2x}{x+5}\right)$

g) $y = 6x^5 \ln x^2$

h) $y = \sqrt{x}\ln x + e^{\tan x}$

i) $y = \frac{1}{x^2}\ln x$

j) $y = 2e^{-3x} + \ln^2 x + 3x^{5/3}$

k) $y = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3}$

l) $y = \frac{e^{7x} + \ln x}{x}$

m) $y = \ln(\ln x)$

n) $y = x^5 + \ln x + 2^{2x}$

ñ) $y = \sqrt{e^x} + (e^x + 2)(e^x - 2)$

o) $y = \ln(\operatorname{sen} x - \cos x)$

p) $y = e^x \operatorname{sen}^2 x + \cos(e^x + 2)$

q) $y = (1 + \ln \operatorname{sen} x)^2$

**Act-53)** Deriva las siguientes funciones.

a) $y = 5^{3x} + e^{-10x}$

b) $y = e^{x+3} - 10^{\sqrt{x}}$

c) $y = 9e^{3x+1} + 4^{x^2+x}$

d) $y = 6^{-x} - \log_5(2x-9)^3$

e) $y = e^{-2\cos 3x}$

f) $y = 5e^{\frac{5}{x+2}} - e^{3x}$

g) $y = 5e^{-x^2} + 8^{x^3}$

h) $y = \tan\left(\sqrt{x} + e^x\right)$

i) $y = e^{\sec(x^3 - 3x + 1)}$

j) $y = \ln e^{\operatorname{sen} 2x}$

k) $y = \log(e^x + 1) + 2x^e + 2\sqrt[3]{(x+6)^2}$

l) $y = e^{7x} + \log(x^3 - x^2 + x)$

**Act-54)** Determina la pendiente de la curva $y = f(x)$, y la ecuación de su recta tangente, en el punto de abscisa indicada.

a) $y = \frac{1}{4} ln\, x + \sqrt{2}$ en $x_0 = 0.25$

b) $y = \frac{3}{5} e^x + 1$ en $x_0 = 0$

c) $y = 4x\, e^x + 2\, ln\, x$ en $x_0 = 1$

**Act-55)** Determina la ecuación de la recta perpendicular (recta normal) a la tangente a la curva en el punto indicado.

a) $y = e^{2x} + 4$ $(0, 5)$

b) $y = ln(3x^5 - 2)$ $(1, 0)$

**Act-56)** Calcula el área del triángulo determinado por la recta tangente a la curva $xy - 1 = 0$ en $P_0(1,1)$ y los ejes de coordenadas.

**Act-57)** Determina en qué puntos de la curva $y = f(x)$ sus tangentes pasan por el origen de coordenadas.

a) $y = 13x^2 + 2x^3 + 5x + 9$ b) $y = \mathrm{e}^{5x}$

**Act-58)** Determina la tercera derivada de la función $y = f(x)$:

a) $y = ln(1-x)$ b) $y = e^{x^2}$ c) $y = ln(1+x)$

d) $y = e^{2x} \operatorname{sen} x$ e) $y = e^x\, ln\, x$ f) $y = \sqrt{3x}$

**Act-59)** Dada la función $f(x) = e^{-x}$. Calcula $f(0) + f'(0) - f''(0)$.

**Act-60)** Determina la tercera derivada de la función $\mathrm{f}(x) = e^{\operatorname{sen} x}$.

**Act-61)** Demuestra que la función $y = \frac{x^2+2x+2}{2}$ satisface la ecuación $1 + (y')^2 = 2y\, y''$.

**Act-62)** Si $y = x \cos x$, resuelve la ecuación $y''+y+1=0$.

**Act-63)** Escribe la ecuación de la tangente a la curva $y = ln\, x$ sabiendo que su pendiente es 3.

**Act-64)** Determina las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $xy = 1$ trazadas desde el punto $(-1,1)$.

**Act-65)** Elabora una tabla con el formulario de todas las reglas de derivación estudiadas en las unidades de aprendizaje 2 y 3.

UNIDAD DE APRENDIZAJE IV

# APLICACIONES DE LAS FUNCIONES Y LA DERIVADA

**Competencia de unidad:** Aplica en forma crítica y reflexiva las funciones y sus derivadas en la modelación, formulación y resolución de problemas en diversos contextos, y hace una evaluación de los resultados.

## COMPETENCIAS DISCIPLINARES QUE PROMUEVE

En esta unidad de aprendizaje se contribuye de manera directa a desarrollar las siguientes competencias disciplinares del área de matemáticas:

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos y operaciones aritméticas, algebraicas y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.



## CONTENIDO TEMÁTICO:

4.1. **Introducción.**

4.2. **Aplicaciones geométricas y algebraicas de la derivada (resolución del problema de las tangentes):** determinación de rectas tangentes y normales a una curva dada. Determinación de ángulos entre curvas. Determinación de ceros o raíces reales de una función o ecuación.

4.3. **Aplicaciones físicas de la derivada (resolución del problema de la velocidad instantánea):** velocidad y aceleración instantánea. Rapidez o razones de cambio instantáneo. Rapidez y Razones de cambio relacionadas.

4.4. **Aplicaciones de la derivada al análisis y graficación de funciones:** Funciones creciente y decreciente. Determinación de intervalos de crecimiento o decrecimiento de una función. Cálculo de máximos y mínimos relativos por el criterio de la primera derivada. Concavidad. Puntos de inflexión.

4.5. **Aplicación de las funciones y la derivada a la modelación y resolución de problemas de optimización:** de la ingeniería, de la economía, la administración, el comercio y otros.

Defiende tu derecho a pensar,
porque incluso pensar en forma errónea
es mejor que no pensar…
(Hipatia de Alejandría)



**Hipatia** (“355-415”) fue una filósofa y maestra neoplatónica griega, natural de Egipto, que se destacó en los campos de las matemáticas y la astronomía, miembro y cabeza de la Escuela neoplatónica de Alejandría a comienzos del siglo V. Hipatia es la primera mujer, de la cual se tiene registro histórico, que sobresalió en matemática, y escribió principalmente sobre geometría, álgebra y astronomía, mejoró el diseño de los primitivos astrolabios, instrumentos para determinar las posiciones de las estrellas sobre la bóveda celeste.

# UNIDAD DE APRENDIZAJE IV

## APLICACIONES DE LAS FUNCIONES Y LA DERIVADA

### *4.1 Introducción*

Las aplicaciones de las derivadas son muy diversas. En esta unidad de aprendizaje aplicaremos primeramente la derivada a la resolución de los dos problemas fundamentales que motivaron su invención y desarrollo. Posteriormente, la aplicaremos al análisis y graficación de funciones. Y finalmente estudiaremos sus aplicaciones en la modelación y resolución de problemas de optimización, y de algunos problemas relacionados con las ciencias naturales y sociales, tales como la física, la química, la biología, la economía, la administración y los negocios.

### *4.2. Aplicaciones geométricas y algebraicas de la derivada (resolución del problema de las tangentes)*

Como se dijo al inicio de la unidad de aprendizaje 1, el Cálculo Diferencial se invento para resolver dos tipos de problemas fundamentales estrechamente relacionados entre sí: **el problema de las tangentes y el problema de la velocidad instantánea.**

**El problema de las tangentes:** consiste en trazar una recta tangente (o determinar la ecuación de una recta tangente) a una curva dada en un punto específico de ella (Ver figura 4.1).

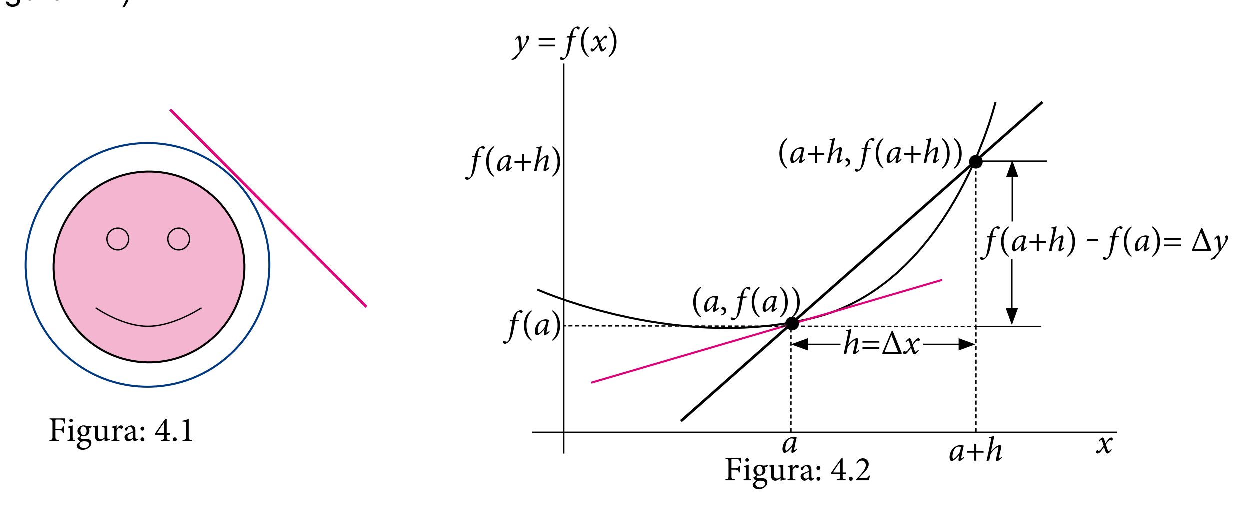



Figura: 4.1

Figura: 4.2

La problemática implicada en este problema general es que, a diferencia de cuando se dan dos puntos para determinar la recta, aquí se pide la ecuación de la recta tangente cuando solo se conoce la curva y un punto de ella. La resolución a la que llegamos en las unidades 1 y 2, utilizando el **Método de Pierre de Fermat** de aproximaciones por rectas secantes (Ver Figura 4.2), fue la siguiente:

La pendiente de la recta secante es: $m_s = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{h} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

De donde la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en un punto $P(x, y)$ de su gráfica es:

$$\boldsymbol{m_t} = \lim_{\Delta x \to 0} m_s = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Pero los límites que aparecen en la expresión anterior son precisamente los que definen la derivada de la función, de donde se obtiene que la pendiente de la recta tangente a la curva es: $m_t = f'(x)$.

De esta manera queda resuelto en lo general, y analíticamente, el primer problema fundamental del Cálculo Diferencial. Además, ahora ya podemos dar una definición general de recta tangente a una curva: **la recta tangente en un punto** $P(x, y)$ de una curva dada por la función $y = f(x)$, **es aquella que pasa por dicho punto y tiene una pendiente igual al valor de la derivada de la función en el punto** (llamado punto de tangencia).

**Nota:** Cuando $\Delta x \to 0$**,** se observa cómo (Ver figura 4.2) en el punto de tangencia las rectas secante y tangente se confunden con la curva de la función, de ahí que la curva pueda ser considerada geométricamente como formada por un número infinito de segmentos de recta, de longitud infinitamente pequeña, con pendiente igual al valor de la derivada en el punto de tangencia. Esto se denomina **linealización de la curva.**

En consecuencia, y por definición de perpendicularidad entre rectas, **la pendiente de la recta normal** a la curva en el punto de tangencia será: $m_n = \dfrac{-1}{m_t} = \dfrac{-1}{f'(x)}$

**Ejemplo 1:** Determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la función (la parábola) $y = x^2 - 3x$, en el punto $P\,(1, y)$ de su gráfica.

**Resolución:** Ya con la derivada nos ahorraremos los tediosos y complicado cálculos del método de Pierre de Fermat de aproximaciones por secantes (aunque estos siguen estando implícitamente en el concepto y cálculo de la derivada), y procedemos de manera directa al cálculo de la pendiente de la recta tangente a la curva en $P\,(1, y)$, que es igual a valor de la derivada de la función en dicho punto (y que es igual a la pendiente de la curva en el punto de tangencia).

$$\boldsymbol{m_t} = f'(x) = 2x - 3 \quad \Rightarrow \boldsymbol{m_t} = f'(1) = 2(1) - 3 = -1$$

Por tanto, la ecuación general de la recta tangente a la curva $y = x^2 - 3x$ (Ver figura 4.3) será:

$$y - y_1 = \boldsymbol{m_t}(x - x_1) \quad \Rightarrow y - (f(1)) = -1(x - 1)$$

$$\Rightarrow y - (-2) = -1(x - 1)$$

$$\therefore \quad \boxed{x + y + 1 = 0} \Leftrightarrow \boxed{y = -x - 1}$$

Y la ecuación de la recta normal a $y = x^2 - 3x$, en el punto $P\,(1, y)$ de su gráfica es:

$$y = y_1 = m_n(x - x_1) \qquad \Rightarrow y - y_1 = \frac{-1}{f'(x)}\,(x - x_1)$$

$$\Rightarrow y - (f(1)) = \frac{-1}{-1}\,(x - 1) \Rightarrow y - (-2) = 1(x - 1)$$

$$\therefore \quad \boxed{x - y - 3 = 0} \;\Leftrightarrow\; \boxed{y = x - 3}$$

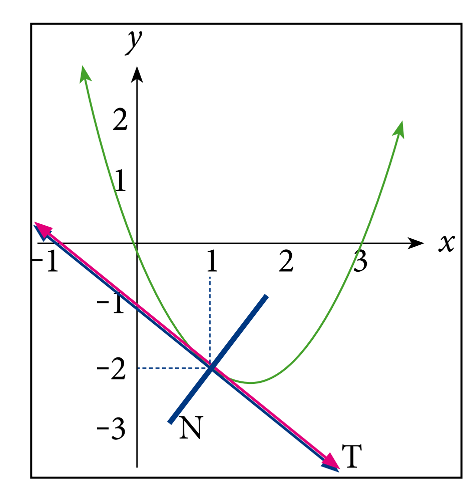
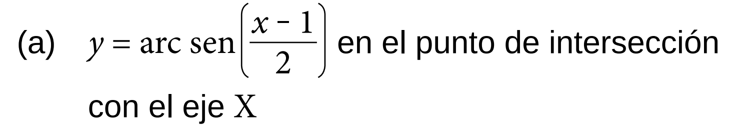



Figura: 4.3

**Ejemplo 2:** Determina la ecuación de las rectas tangente y normal a la curva dada por la función



(a) $y = \text{arc sen}\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$ en el punto de intersección con el eje X

(b) $y = e^{1-x^2}$ en los puntos de intersección con la recta $y - 1 = 0$.

**Resolución:**

(a) Primero hay que determinar el punto donde la curva corta al eje X, y después procedemos de manera directa al cálculo de la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto de interseccion, que es igual a valor de la derivada de la función en dicho punto. En el eje X el valor de la función es cero, por tanto:

$$y = \text{arc sen}\left(\frac{x-1}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow x = 1 \quad \Rightarrow P(1{,}0)$$

$$y' = \frac{\left(\dfrac{x-1}{2}\right)'}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{x-1}{2}\right)^2}} = \frac{\left(\dfrac{1}{2}\right)}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{x-1}{2}\right)^2}} \quad \Rightarrow \boldsymbol{m_t} = f'(1) = \frac{\left(\dfrac{1}{2}\right)}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{1-1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \boldsymbol{m_n} = -2$$

Por tanto, las ecuaciones de la recta tangente y normal a la curva en $P(1{,}0)$ serán:

$$y = y_1 = m_t(x - x_1) \quad \Rightarrow y - (0) = \frac{1}{2}(x - 1) \quad \Rightarrow \boxed{x - 2y - 1 = 0} \quad \text{Ec. de la tangente}$$

$$y = y_1 = m_n(x - x_1) \quad \Rightarrow y - (0) = -2(x - 1) \quad \Rightarrow \boxed{2x + y - 2 = 0} \quad \text{Ec. de la normal}$$

(b) Primero hay que determinar el punto, o los puntos, de intersección de la curva con la recta $y - 1 = 0$ ($\Rightarrow y = 1$), y después procedemos de manera directa al cálculo de la pendiente de la recta tangente. En la intersección se tiene que:

$$y = e^{1-x^2} = 1 \;\Rightarrow \ln(1) = 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

Por tanto se tiene dos puntos de intersección: $P(1{,}1)$ y $P(-1{,}1)$. Además, como $y = e^{1-x^2}$ y $y' = -2x \cdot e^{1-x^2}$, entonces las pendientes respectivas en cada uno de los puntos es:

$$\text{Para } P(1{,}1) \Rightarrow m_t = f'(1) = -2(1)\cdot e^{1-1^2} = -2 \quad \Rightarrow m_n = \frac{-1}{f'(x)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Para } P(-1{,}1) \Rightarrow m_t = f'(-1) = -2(-1)\cdot e^{1-(-1)^2} = 2 \quad \Rightarrow m_n = \frac{-1}{f'(1)} = -\frac{1}{2}$$

Por tanto, las ecuaciones de la recta tangente y normal a la curva en $P(1,1)$ serán:

$y - y_1 = \boldsymbol{m_t}(x - x_1) \quad \Rightarrow y - (1) = -2(x-1) \quad \Rightarrow \boxed{-2x - y + 3 = 0}$ Ec. de la tangente

$y - y_1 = \boldsymbol{m_n}(x - x_1) \quad \Rightarrow y - (1) = \frac{1}{2}(x-1) \quad \Rightarrow \boxed{x - 2y + 1 = 0}$ Ec. de la normal

Y las ecuaciones de la recta tangente y normal a la curva en $P(-1,1)$ serán:

$y - y_1 = \boldsymbol{m_t}(x - x_1) \quad \Rightarrow y - (1) = 2(x+1) \quad \Rightarrow \boxed{2x - y + 3 = 0}$ Ec. de la tangente

$y - y_1 = \boldsymbol{m_n}(x - x_1) \quad \Rightarrow y - (1) = \frac{-1}{2}(x+1) \quad \Rightarrow \boxed{x + 2y - 1 = 0}$ Ec. de la normal

**Ángulo entre dos curvas**

En el curso de matemáticas IV estudiaste que dadas dos rectas cualesquiera $L_1$ y $L_2$ no paralelas y situadas en un mismo plano, el ángulo de intersección entre ellas $\beta_1$ (o $\alpha_1$) está dado por el ángulo formado por dichas rectas (Ver Fig. 4.4) en el punto de intersección, y puede ser determinado por la fórmula:

$$\tan \beta_1 = \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \cdot \tan \theta_2} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{\tan \theta_2 - \tan \theta_1}{1 + \tan \theta_1 \cdot \tan \theta_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

$$\theta_1 \text{ y } \theta_2 \neq \frac{\pi}{2}$$

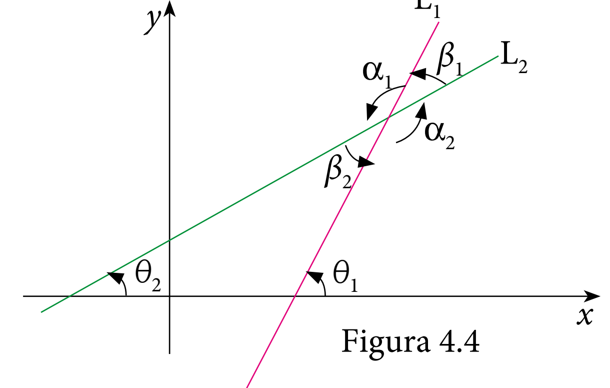


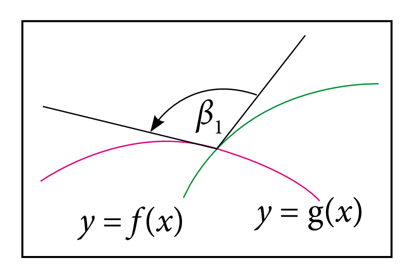
Figura 4.4

Aplicando el concepto de derivada lo anterior puede ser generalizado para el ángulo entre dos curvas cualesquiera (no necesariamente rectas) de la siguiente manera: **Dadas dos curvas cualesquiera** $y_1 = f(x)$ y $y_2 = g(x)$, **el ángulo de intersección entre ellas** $\beta_1$ **está dado por el ángulo formado por sus tangentes en el punto de intersección.** Y de forma semejante al caso de las rectas, puede ser calculado por:

$$\tan \beta_1 = \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \cdot \tan \theta_2} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{g'(x) - f'(x)}{1 + f'(x) \cdot g'(x)}$$

De donde, el procedimiento para obtener el ángulo de intersección entre dos curvas es el siguiente:

1. Se calculan las coordenadas de los puntos de inter sección, resolviendo el sistema de ecuaciones formadas por las funciones.
2. Se derivan las ecuaciones para encontrar las pen dientes de las tangentes de las curvas para cada uno de los puntos de intersección.
3. Se aplica la expresión que determina dicho ángulo.



**Nota:** En caso de que se obtenga un ángulo agudo $\beta_1$ que sea negativo, el ángulo de intersección es: $-\beta_1$. Y cuando se obtenga un ángulo no agudo $\beta_1$ que sea positivo, el ángulo de intersección es: $180°-\beta_1$. Finalmente, en caso de que se obtenga un ángulo no agudo $\beta_1$ que sea negativo, el ángulo de intersección es: $180°+\beta_1$.

**Ejemplo 3:** Determinar el ángulo formado por las curvas dadas por las siguientes funciones $f(x) = 4x^2 + 5x - 7$ y $g(x) = -6x^2 - 2x + 5$.

**Resolución:**

1. Se calculan las coordenadas de los puntos de intersección, resolviendo el sistema de ecuaciones formadas por las funciones. Como en el punto de intersección la ordenada ($y$) tiene el mismo valor en ambas funciones, entonces:

$$y_1 = y_2 \quad \Rightarrow f(x) = 4x^2 + 5x - 7 = -6x^2 - 2x + 5 = g(x) \quad \Rightarrow 10x^2 + 7x - 12 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(7) \pm \sqrt{(7)^2 - 4(10)(-12)}}{2(10)} = \frac{-7 \pm \sqrt{529}}{2a} = \frac{-7 \pm 23}{20}$$

$$\therefore \; x_1 = \frac{-7 + 23}{20} = 0.8 \;\Rightarrow P_1(0.8, f(0.8))$$

$$x_2 = \frac{-7 - 23}{20} = -1.5 \;\Rightarrow P_2(-1.5, f(-1.5))$$

2. Se derivan las ecuaciones para encontrar las pendientes de las tangentes de las curvas para cada uno de los puntos de intersección.

$$f(x) = 4x^2 + 5x - 7 \;\Rightarrow f'(x) = 8x + 5 \;\; ; \;\; g(x) = -6x^2 - 2x + 5 \;\Rightarrow g'(x) = -12x - 2$$

$$\Rightarrow f'(0.8) = 8(0.8) + 5 = 11.4 \qquad ; \quad f'(-1.5) = 8(-1.5)+5 = -7$$

$$\Rightarrow g'(0.8) = -12(0.8) - 2 = -11.6 \;\; ; \;\; g'(-1.5) = -12(-1.5) - 2 = 16$$

3. Se aplica la expresión que determina dicho ángulo para cada uno de los puntos

Para: $P_1(0.8, f(0.8)),\; \tan\beta_1 = \dfrac{g'(x) - f'(x)}{1 + f'(x)\cdot g'(x)} = \dfrac{(-11.6) - (11.4)}{1 + (-11.6)(11.4)} = 0.17525$

$$\Rightarrow \beta_1 = \arctan(0.17525) = 0.1735 \text{ radianes} \approx 9.94°$$

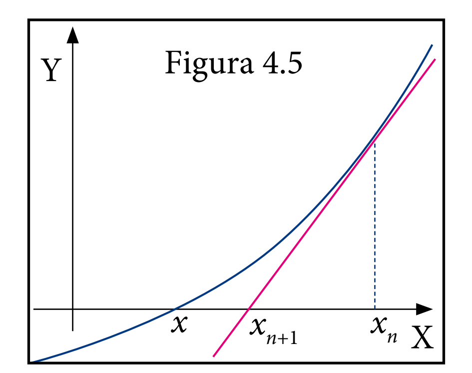
Para: $P_2(-1.5, f(-1.5)), \quad \tan\beta_2 = \dfrac{g'(x) - f'(x)}{1 + f'(x)\cdot g'(x)} = \dfrac{(16) - (-7)}{1 + (16)(-7)} = -0.2072$

$$\Rightarrow \beta_2 = \arctan(-0.2072) = -(-0.2043) \text{ radianes} \approx 11.7°$$

**Determinación de los ceros reales de una función $y = f(x)$ (o de las raíces reales de una ecuación $f(x) = 0$) por el Método de Newton-Raphson (Opcional)**

Como habrás notado en la unidad de aprendizaje 1 la determinación de **ceros de una función** (o de raíces de la ecuación correspondiente) suele ser, en general, bastante complicado para polinomios de grado mayor que dos. Sin embargo, existen en análisis numérico (una rama más de las matemáticas) muchos métodos aproximados para resolver este problema con aceptable precisión. Uno de estos métodos es el **método de Newton-Raphson**, que también puede ser usado para encontrar el máximo o mínimo de una función, encontrando los ceros de su primera derivada.

El método está ilustrado geométricamente en la figura 4.5, donde se muestran las gráficas de la función $y = f(x)$ y de su recta tangente en $x_n$ que es un valor hipotético (y muy cercano) al cero real ($x$) de la función. De la figura 4.5 se observa que:




$$m_t = f'(x_n) = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}} \Rightarrow \boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} \; ; \; f'(x_n) \neq 0$$

Como se puede observar el valor de $x_{n+1}$ esta más cerca que $x_n$ del cero o raíz $x$ de la función. En caso de que se requiera una mejor aproximación se toma a $x_{n+1}$ como el nuevo valor hipotético y se repite el procedimiento para obtener un $x_{n+2}$, el cual estará aun más cercano que $x_{n+1}$ de la raíz real $x$. De esta manera el algoritmo se repite hasta que se alcance la aproximación deseada, o de que el error sea el mínimo permitido.

**Nota:** también existen fórmulas para hallar las raíces de ecuaciones de tercer y cuarto grado, sin embargo, dichas fórmulas son muy complicadas y nada prácticas. Además, existe un teorema en teoría de ecuaciones, que establece que no es posible encontrar una fórmula general, en términos de los coeficientes de la ecuación, que permita hallar los ceros exactos de una función polinomial de grado cinco o mayor. Esto significa que, en general, sólo se pueden hallar aproximaciones para los ceros de funciones de grado mayor que cuatro aplicando métodos numéricos como el de Newton-Raphson.

**Ejemplo 4:** De la función $f(x) = x^3 - 2x - 5$ (o de la ecuación $x^3 - 2x - 5 = 0$).

(a) Determinar los ceros reales por el método de Newton-Raphson.

(b) **Tarea extra-clase:** Grafica usando un procesador la función dada y después a partir de su gráfica determina los ceros de la función, luego compara los resultados con los obtenidos por el método de Newton-Raphson.

**Resolución:** Antes de empezar con el método de Newton-Raphson, primero se necesita determinar un valor hipotético inicial $x_n = x_1$ pero cercano del cero real de la función. Esto se puede hacer mediante una tabulación o mediante ensayo y error.

Por ejemplo: $\begin{cases} f(1) = (1)^3 - 2(1) - 5 = -6 \\ f(2) = (2)^3 - 2(2) - 5 = -1 \\ f(3) = (3)^3 - 2(3) - 5 = 16 \end{cases}$

De estos resultados se observa que existe un cero entre 2 y 3, pues hay un cambio de signo de la función y se trata de una función continua. Nótese que para $x = 2$ hay un error de 1 en la determinación del cero de la función, mientras que para $x = 3$ el error seria de 16 (Por qué).

De donde resulta razonable empezar hacer las aproximaciones con $x_n = x_1 = 2$. Antes de iniciar los cálculos determinamos la derivada: $f'(x) = 3x^2 - 2$. Por tanto se obtiene que:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

$$\Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{-1}{3(2)^2 - 2} = 2.1 \quad ; \quad f(2.1) = 0.061$$

$$\Rightarrow x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 2.1 - \frac{f(2.1)}{f'(2.1)} = 2.1 - \frac{0.061}{3(2.1)^2 - 2} = 2.094568 \;\; ; f(2.094568) = 0.00018$$

Si nos quedamos con esta última aproximación, resulta entonces que el cero de la función es precisamente el valor de $x_3 = 2.094568$. ¿De cuánto fue el error?

***ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE:***

**Act-1)** Determina, en el punto indicado, las ecuaciónes de la recta tangente y normal a las siguientes curvas:

a) $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$ en el punto $P\,(x, 3)$ de su gráfica.
b) $f(x) = x^3 - 2x - 5$ en el punto $P\,(x, 0)$ de su gráfica.
c) $y = \sqrt[3]{x - 1}$ en el punto $P\,(9, y)$ de su gráfica.
d) $y = ln(x - 1)$ en el punto de intersección con el eje X.
e) $y = e^{2x} + 5$ en el punto de intersección con el eje Y.

**Act-2)** Calcula el ángulo de intersección del siguiente par de curvas.

a) $y = x^2$ , $y = x^3$
b) $y = (x - 2)^2$ , $y = -4 + 6x - x^2$
c) $y = x^2$ , $y = x^{-1}$

**Act-3)** Determina la interseccion de las curvas:

a) $f(x) = x^3$ y $g(x) = 1 - x$
b) $f(x) = ln\, x^2$ y $g(x) = -x$

**Act-4)** De las siguientes funciones, determinar los ceros reales por el método de Newton-Raphson. Y graficarlas usando un procesador para después determinar a partir de la gráfica los ceros de la función, luego compara los resultados con los obtenidos por el método de Newton-Raphson.

a) $f(x) = x^3 + 2x - 1$
b) $f(x) = log(x+1) - x^2 \quad ; \quad x \in [0, 2]$
c) $f(x) = \text{sen}\, x - \cos x - 1.1 \quad ; \quad x \in (0, \pi/2)$

**Act-5)** Determina las raices de la ecuación $e^{-x} - x = 0$.

## *4.3 Aplicaciones físicas de la derivada (resolución del problema de la velocidad instantánea)*

**El problema de la velocidad instantánea** ($\dot{v}$): consiste en determinar la velocidad (o la rapidez de cambio) con que se desplaza un móvil en un instante de tiempo dado.

Con relación a este problema, al inicio de la unidad de aprendizaje 2 se puso como ejemplo de problemas que han sido siempre muy importantes para el hombre el de la **forma de cuantificar la rapidez con la que cambia una magnitud**, por ejemplo la velocidad de un móvil en kilómetros por hora. Para ello se puso un ejemplo de dos funciones $f$ y $g$ (fig. 4.6 a y b) que cambian lo mismo en una unidad de tiempo (4 km en 1 hora), sin embargo analizando en una gráfica su comportamiento en diferentes puntos de su trayectoria, $f$ no cambia casi nada al principio y mucho al final y $g$ va cambiando de manera uniforme.

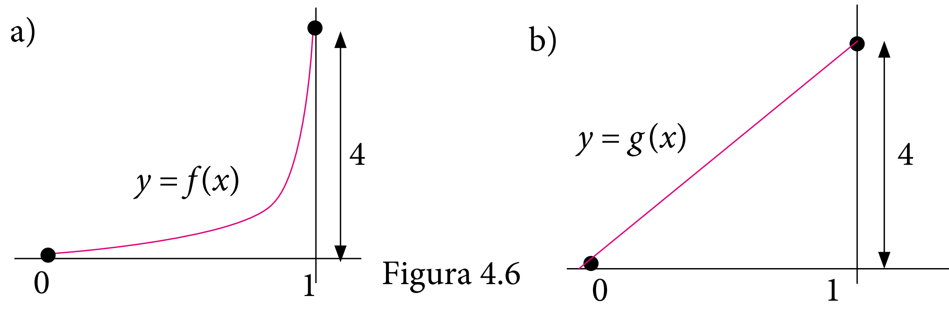


Figura 4.6

En este caso decimos que la **velocidad instantánea** (o **rapidez de cambio**) es diferente en ambas funciones, pero lo interesante y útil es que esa **rapidez de cambio** se puede medir o cuantificar.

Recordarás que para "inventar" la derivada partimos de algo a lo que le denominamos **razón de cambio promedio**, y ella nos permitió llegar al **concepto de derivada como el límite de esas razones que ahora le vamos a llamar velocidad instantánea (o rapidez de cambio).**

Así, pues, en base a las ideas del método de Pierre de Fermat, en las unidades 1 y 2 quedo establecido que el problema fundamental de calcular la velocidad instantánea (o rapidez de cambio) se puede resolver con el siguiente límite:

$$\dot{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Donde: $s = s(t)$ es la ecuación del movimiento del móvil para un tiempo $t$.

Pero, esta expresión matemática, que permite calcular la velocidad instantánea en un tiempo ***t*** de un móvil que se desplaza con velocidad variable según la función de movimiento $s = s(t)$, es precisamente la expresión que define a la derivada de la función del movimiento en un punto $P(t, f(t))$. Por tanto:

$$\dot{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \boldsymbol{s'(t)}$$

$v_{promedio} = \frac{S}{t}$

Modelos Matemáticos

O simplemente: $\dot{v} = s'(t)$

**Resumiendo:** desde el punto de vista físico la derivada sirve también para estudiar la velocidad instantánea y la rapidez de cambio de cualquier magnitud o variable que dependa del tiempo (o de otra magnitud variable). Es importante para ello que conozcas que:

> Si en general, $y = f(t)$ es la variación de una cierta variable con respecto al tiempo, entonces $\dot{y} = f'(t)$ es la velocidad instantánea o la rapidez de cambio con que varía esa variable en cada instante.

**Nota:** En la ciencia Física como la velocidad es un vector, la magnitud de ese vector es lo que se denomina como la rapidez. O sea, en Física la rapidez es $|f'(t)|$.

Con esta generalización se puede entonces, en el caso de la velocidad de un móvil, plantear que:

> La aceleración en un instante de tiempo dado de un móvil $a\,(t)$, es la derivada de la velocidad instantánea de dicho tiempo. O la segunda derivada del desplazamiento con respecto a dicho tiempo.
>
> $$\therefore \quad a(t) = \dot{v}'(t) = s''(t)$$

A continuación vamos entonces a ver algunas situaciones en las que utilizando las derivadas se puede cuantificar esa variación en situaciones de la física y en otras áreas. Por ejemplo, en Física si $s = f(t)$ donde **s** es el **espacio recorrido** por un móvil en una unidad de tiempo, o sea nos da la posición de un móvil con respecto al tiempo, entonces $\dot{v} = f'(t)$ nos da la **velocidad** de ese móvil en cada instante, o sea, **cómo varía la velocidad en cada instante de tiempo (velocidad instantánea).**

En el caso de la función **g** representada en el gráfico 4.6b se trata de un móvil que se mueve con movimiento rectilíneo uniforme (velocidad constante $v$), entonces la ecuación de su movimiento es del tipo $s(t) = s_0 + v \cdot t$, donde **s** es el valor del desplazamiento, $s_0$ el valor del desplazamiento inicial, v el valor de la velocidad y t el tiempo. Si derivas **s** con respecto a ***t*** se cumple que $s'(t) = v$. Por ejemplo, si $g(t) = 4t$, entonces $g'(t) = 4$, y ello expresa que la velocidad con la que recorre cada unidad de tiempo es constante e igual a 4. De igual modo si la función $f$ (fig.4.6a) tiene como ecuación $f(t) = 4t^4$ entonces la velocidad instantánea con la que se recorre cada unidad de tiempo es una función del tiempo con ecuación $f'(t) = 16t^3$.

Vamos a hacer una tabla para comparar la velocidad instantánea (o la rapidez de cambio en estos casos) de esas dos funciones en instantes dados. Puedes comprobar con la calculadora estos resultados

| **Valores de t** | **0** | **0.25** | **0.5** | $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ | **1** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Rapidez de cambio** $f'(t)=16t^3$ | **0** | $16\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{4}=0.25$ | $16\left(\frac{1}{2}\right)^3=2$ | $16\,(\sqrt[3]{\frac{1}{4}})^3=16\left(\frac{1}{4}\right)=4$ | **16** |
| **Rapidez de cambio** $g'(t)=4$ | **4** | **4** | **4** | **4** | **4** |

Se comprueba que efectivamente la rapidez de cambio es diferente en ambas funciones como se había dicho desde el inicio, y la de la primera es muy pequeña al principio y mucho más grande que la segunda al final. Solo son iguales en el instante de tiempo $t=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\approx 0.63$, y en ese punto las tangentes a las curvas respectivas tienen igual pendiente que en este caso es $m=4$. En general se tiene que:

> La velocidad en un instante dado de cualquier clase de movimiento, uniforme o no, es la derivada del desplazamiento con respecto al tiempo. Y al valor absoluto de esa velocidad se le denomina rapidez de cambio.

**Ejemplo 5:** La ley del movimiento de un móvil es $s(t)=50t-10t^2$ (s está medido en metros y $t$ en segundos). Calcula su velocidad instantánea, su rapidez y su aceleración a los 2 y 3 segundos.

**Resolución:** Derivando $s(t)$ con respecto a $t$ y evaluando en $t=2$ y $t=3$ se obtiene

$$s(t)=50t-10t^2 \Rightarrow \dot{v}(t)=s'(t)=50-20t \Rightarrow a(t)=s''(t)=-20\ m/s^2$$

$$\dot{v}(2)=s'(2)=50-20(2)=10\ m/s\ ;\ \dot{v}(3)=s'(3)=50-20(3)=-10m/s$$

Por tanto, las velocidades instantáneas son respectivamente 10 m/s y -10 m/s, mientras que en los dos tiempos la rapidez es la misma e igual a 10 m/s. Además, la aceleración también es igual para los dos tiempo ya que es una constante, y su valor es de $-20$ $m/s^2$.

**Ejemplo 6:** La ecuación del movimiento de un punto es $s(t)=12t-\frac{4}{9}t^3$ donde *t* se mide en segundos y s en metros. Determina el instante en que el móvil se detiene, y su aceleración en dicho instante.

**Resolución:** La velocidad en el instante *t* es $\dot{v}=s'(t)=12-\frac{4}{3}t^2$. Y cuando el móvil se detiene su velocidad es cero, por lo tanto: $12-\frac{4}{3}t^2=0 \Rightarrow t^2=\frac{36}{4} \Rightarrow t=\pm 3$.

Como $t > 0$, entonces $t = 3$. Por tanto, el móvil se detiene a los 3 $s$. Y la aceleración en dicho instante es: $a(t) = \dot{v}' = s''(t) = -\frac{8}{3}t \Rightarrow a(3) = v' = s''(t) = -\frac{8}{3}(3) = -8\ m/s^2$

**Rapidez y razones de cambio relacionadas**

En muchos problemas sucede a veces que dos o más razones de cambio instantáneas están relacionadas, explícitamente o implícitamente, a través de una fórmula o una expresión matemática, y es posible determinar alguna de ellas cuando se conocen las demás. En este caso se dice que son razones de cambio relacionadas, tal como se ilustra en los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 7:** Supón que el área infectada de una herida es circular. Si el radio del área infectada es de 4 mm y está creciendo a razón de 1 mm / hr, ¿con que rapidez está creciendo el área infectada en ese momento?

**Resolución:** El área de la herida infectada viene dada por $A = \pi r^2$. Nótese que los datos son el radio en un cierto momento y la rapidez de cambio del mismo en dicho momento, mientras que la incógnita es la rapidez de crecimiento del área. O sea, cuando $r = 4$mm, se tiene que $\frac{dr}{dt} = 1$mm/hr , y $\frac{dA}{dt} = ?$ Además, obsérvese que estas razones de cambio están relacionada implícitamente por la fórmula del área infectada, lo cual se pone de manifiesto al derivar, aplicando la regla de la cadena, ambos miembros de la fórmula con respecto al tiempo.

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \cdot \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 2\pi(4) \cdot (1\text{mm/hr}) = 25.133\ \text{mm}^2/\text{hr}$$

**Por tanto:** el área infectada está creciendo con una rapidez de $25.133$ mm$^2$/hr.

**Ejemplo 8:** Un depósito de agua de forma cilíndrica se está llenando con un bomba a razón de $10$ m$^3$/hr. Si el depósito tiene un radio de 2 metros, determina la rapidez con que sube el nivel del agua.

**Resolución:** Si $r$ es el radio (que es constante en este caso) y $h(t)$ la altura en función del tiempo, entonces el volumen del cilindro V al tiempo $t$ estará dado por $V(t) = \pi r^2 h(t)$. De donde, aplicando la regla de cadena se obtiene que:

$$\frac{dV}{dt} = \pi r^2 \cdot h'(t) \Rightarrow \boxed{h'(t) = \frac{1}{\pi r^2} \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{10m^3/hr}{(3.1416)(2^2)} = 0.796\ \text{m/hr}}$$

**Ejemplo 9:** Una esfera de metal se dilata por el calor de tal manera que su volumen es $V = \frac{4}{3}\pi(1+3t)^2$ (t en segundos y V en centímetros cúbicos). Calcula:

(a) El volumen inicial. (b) La rapidez con que varía el volumen a los 3 segundos.

**Resolución:**

(a) El volumen inicial se obtiene para $t = 0$, es $V_0 = \frac{4}{3}\pi(1+3(0))^2 = 4.19$ cm$^3$.

(b) Calculamos la derivada del volumen con respecto al tiempo $t = 3$

$$V'(t) = 8\pi\,(1+3t) \Rightarrow V'(3) = 8\pi\,(1+3(3)) = 251.328 \text{ cm}^3/\text{s}$$

Por tanto, el volumen inicial es de 4.19 cm$^3$. Y a los 3 segundos el volumen cambia con una rapidez de 251. 328 cm$^3$/s.

**Ejemplo 10:** Dos autos parten del mismo punto, el primero se dirige al oeste a 25 mph y el segundo al sur a 60 mph. Con que rapidez aumenta la distancia entre ellos después de 2 horas (Ver figura 4.7).

$x = 50$, $\frac{dx}{dt} = 25$, $y = 120$, $z = 130$, $\frac{dz}{dt} = ?$, $\frac{dy}{dt} = 60$

Figura 4.7

**Resolución:** De la figura se observa que aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene que:

$$z^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow 2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{z}}$$

Pero $\frac{dx}{dt} = 25$ mph y $\frac{dy}{dt} = 60$ mph, de donde:



$$x = \frac{dx}{dt}t = (25 \text{ mph})(2) = 50 \text{ millas}$$

$$y = \frac{dy}{dt}t = (60 \text{ mph})(2) = 120 \text{ millas}$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow z = \sqrt{(50)^2 + (120)^2} = 130 \text{ millas.}$$

Por tanto, a las dos horas los autos se alejan entre sí con una rapidez de:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{z} = \frac{50(25) + 120(60)}{130} = 65 \text{ mph}$$

**Ejemplo 11**: Una cámara de televisión, situada al nivel del suelo, está filmando el despegue de un cohete espacial, que se mueve verticalmente de acuerdo a la función de posición $y = 60t^2$, donde $y$ y se mide en pies y $t$ en segundos. La cámara está a 2500 pies de la plataforma de lanzamiento. Calcular la rapidez de cambio del ángulo de elevación $\theta$ de la cámara 5 segundos después del despegue (Ver figura 4.8).

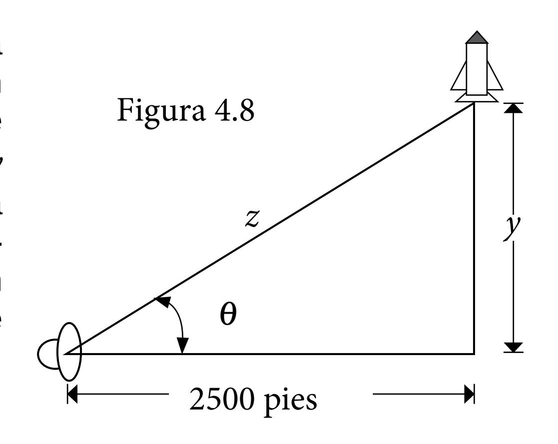



Figura 4.8

**Resolución:** primero hay que buscar una expresión matemática que relacione los datos y las incógnitas del problema. Por trigonometría se sabe que:

$$\tan\theta = \frac{y}{2500} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\tan\theta) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y}{2500}\right) \Rightarrow (\sec^2\theta)\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2500}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2500(\sec^2\theta)}\cdot\frac{dy}{dt} = \frac{\cos^2\theta}{2500}\cdot\frac{dy}{dt} = \frac{(2500/z)^2}{2500}\cdot\frac{dy}{dt} = \frac{2500}{z^2}\cdot\frac{dy}{dt}$$

Pero, a los 5 segundos: $\frac{dy}{dt} = 120t = 120(5) = 600$

$z^2 = (2500)^2 + y^2 = (2500)^2 + (60t^2)^2 = (2500)^2 + (60(5)^2)^2 = 8500000$

Por tanto, la rapidez del ángulo de elevación a los 5 segundos es:

$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2500}{8500000}\cdot(600) = 0.0294$ radianes por segundo.

***ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE:***

**Act-6)** Una flecha se lanza verticalmente hacia arriba, y su trayectoria viene dada por la función de desplazamiento $s(t) = -4.9t^2 + 60t + 2$, donde, $s(t)$ esta medida en metros y t en segundos. Calcula: (a) la velocidad instantanea y la aceleración, a los 3 y 7 segundos, (b) la altura máxima alcanzada, (c) el tiempo que tarda en caer al suelo (d) la velocidad al instante de caer al suelo, (e) los intervalos de tiempo de caida y de bajada.

**Act-7)** Para un móvil, lanzado verticalmente hacia arriba, la ecuación del movimiento es $s(t) = 36t - 4.9t^2$. Determina: (a) la velocidad y la aceleración en cualquier instante $t$. (b) El instante en que la velocidad es nula. (c) La máxima altura alcanzada.

**Act-8)** De los cuerpos cuyos movimientos rectilíneos obedecen a la ley siguiente (las distancias se suponen medidas en metros y los tiempos en segundos):

a) $x = \sqrt{t} + t$
b) $x = t^3 - t^2 + 2t + 6$
c) $x = t^4 - t^2 + 2$
d) $x = e^{2t+1} + 2t^2$
e) $x = 10\cos\frac{\pi}{3}t$
f) $x = \text{sen}\,\frac{\pi}{3}t$
g) $x = t^4 + 3t + 4$
h) $x = 8\cos 2t + 4\,\text{sen}\,2t$
i) $y = 2t^3 + 3t^2 + 4t - 20$
j) $y = a\,\text{sen}\,\pi t$
k) $y = \cos\frac{\pi}{4}t + 20\,\text{sen}\frac{\pi}{4}t$
l) $y = ln(3t + 4)$

Calcula: (a) la velocidad y aceleración inicial, (b) la velocidad y la aceleración instantánea a los 2 segundos, (c) el tiempo y la posición dónde el cuerpo se detiene.

**Act-9)** Dos trenes parten de la misma estación, uno hacia el sur a 70 km/h y el otro hacia el este a 80 km/h. ¿Con qué rapidez se están separando?

**Act-10)** Por el eje X se mueven dos puntos que tienen respectivamente las leyes de movimiento $x = 100 + 5t$ y $x = \frac{1}{2}t^2$ con $t > 0$. ¿Con qué rapidez se alejarán estos puntos, uno del otro, en el momento de su encuentro? ($x$ se da en centímetros y t en segundos).

**Act-11)** Un punto se mueve sobre la hipérbola$y = \frac{10}{x}$ de tal modo que $x$=$t$ ($t$ en segundos, $t > 0$) ¿Con qué rapidez variará su ordenada cuando el punto pase por la posición (5, 2)?

**Act-12)** Un globo esférico se infla a razón de 10 $cm^3$/seg. Calcular la rapidez de cambio del radio del globo cuando el radio es de 20 cm.

**Act-13)** Un globo esférico se desinfla a razón de -10$cm^3$/seg. Calcular la rapidez de cambio del diámetro del globo cuando el radio es de 5 cm.

**Act-14)** Una persona, cuya estatura es de 170 cm, camina por la noche alejándose de un poste de alumbrado que tiene una altura de 8 m. Si la persona se aleja a una velocidad de 2 m/seg, ¿qué tan rápido cambia la longitud de su sombra?

**Act-15)** Uno de los lados de un rectángulo tiene una longitud constante $a$=10 cm, mientras que el otro, b, es variable ($b = 2 + 4t$, $t$ en segundos). ¿Con qué rapidez aumentan la diagonal del rectángulo y su área en el instante en que $b = 30$ cm?

**Act-16)** Un avión que vuela a 5 km de altura, recorre una ruta de vuelo que le llevará directamente sobre una estación de radar. Si la distancia del avión a la estación está decreciendo con una rapidez de 450 km/h cuando dicha distancia es de 15 kilómetros. ¿Cuál es la velocidad del avión en ese momento?

**Act-17)** Un avión vuela con velocidad constante de 800 km/h y con una inclinación de 45° hacia arriba. Calcula la rapidez con que se aleja el avión de la torre de control 2 minutos después de haber estado perpendicularmente a ella a 2 km de altura.

**Act-18)** Un silo en forma de cono circular almacena trigo y se está llenando por arriba a razón de 0.8$m^3$/h. El silo tiene 5 metros de altura y 2 metros de radio en la base. Calcular la rapidez con que el trigo sube el nivel, cuando éste tiene un metro de profundidad.

## *4.4 Aplicaciones de la derivada al análisis y representación (o graficación) de funciones*

En la primera unidad de aprendizaje se hizo un estudio exhaustivo sobre la graficación y análisis las funciones elementales, sin embargo, en esa ocasión no se aplico el concepto y cálculo de derivadas en dichas actividades, ya que la **Derivada de una función** fue desarrollada hasta después en las unidades 2 y 3. Sin embargo, como ahora ya contamos con dicha herramienta, ahora el análisis de las funciones lo haremos de manera más general y apoyándonos centralmente en el concepto y cálculo de la derivada de una función.

Comparando las gráficas de algunas funciones y de sus derivadas se pueden ver algunas cosas interesantes

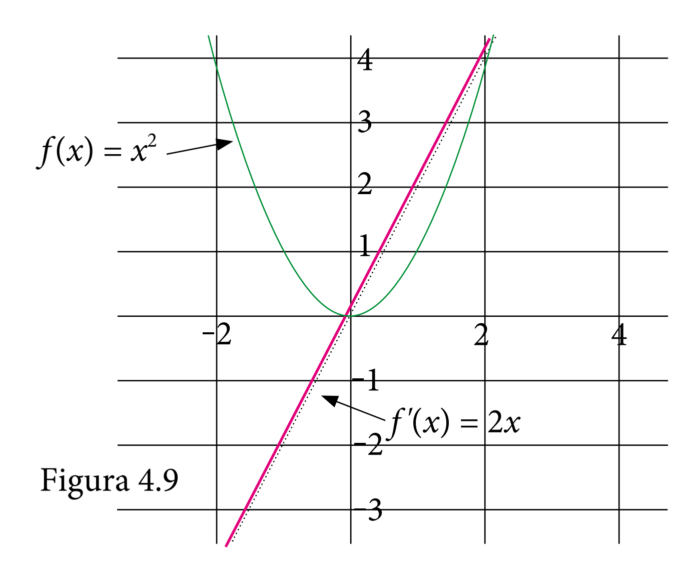


Figura 4.9

En la figura 4.9 se ha representado en un mismo sistema coordenado la gráfica de la parábola $y = x^2$ y la de la recta de ecuación $y = 2x$ que es su derivada. Ya ahí se puede observar que:

En $\boldsymbol{x=0}$, que es donde la función $f$ alcanza su menor valor $\boldsymbol{y=0}$ (mínimo), es también donde la derivada tiene un cero ($x=0$) pues su gráfica corta al eje en (0,0).

En ese mismo punto (0,0), la función $\boldsymbol{f}$ pasa **de decreciente a creciente**, es decir su gráfica "desciende" hasta (0,0) y a partir de ahí "asciende". En ese punto es también donde la función derivada pasa de valores negativos a valores positivos.

**Una pregunta que surge de inmediato es si tendrá alguna relación la función y su derivada a los efectos de su representación.** Veamos otro ejemplo.

En la figura 4.10 se ha representado nuevamente en un mismo sistema coordenado la gráfica de la parábola $y=4x-x^2$ y la de la recta de ecuación $y=4-2x$ que es su derivada. Ahí se observa que:

En $\boldsymbol{x = 2}$, que es donde la función $\boldsymbol{f}$ alcanza su mayor valor $\boldsymbol{y = 4}$ (máximo), es también donde la derivada tiene un cero ($x = 2$) pues su gráfica corta al eje en (2,0).

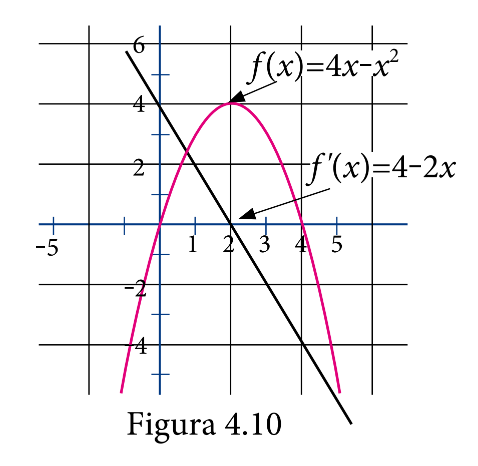


Figura 4.10

En ese propio punto (2,0), la función $\boldsymbol{f}$ pasa de **creciente a decreciente**, es decir su gráfica "asciende" hasta (2,4) y a partir de ahí "desciende". En ese punto es también donde **la función derivada pasa de valores positivos** (su gráfica está por encima del eje de las X) a **valores negativos** (su gráfica está por debajo del eje de las X).

A continuación se formalizará lo observado hasta ahora del comportamiento gráfico.

### Monotonía de las funciones en un intervalo

Como la derivada de una función en un punto $x_0$ no es más que la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto, si esa pendiente es positiva la recta asciende (la pendiente es positiva) y si es negativa la recta desciende (la pendiente es negativa).

En general, **si se cumple que** $y = f(x)$ **es derivable en** $x_0$ **entonces:**

- Si $f'(x_0) > 0$ **entonces** $y = f(x)$ **es creciente en** $x_0$ **(Ver figura 4.11).**
- Si $f'(x_0) < 0$ **entonces** $y = f(x)$ **es decreciente en** $x_0$ **(Ver figura 4.12).**

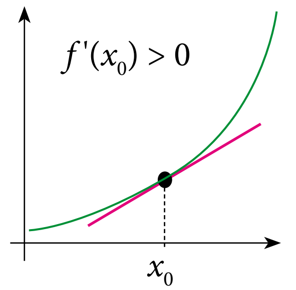
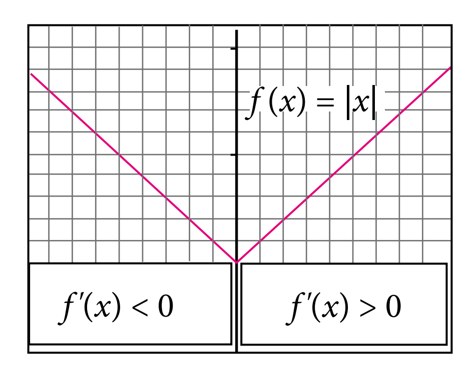


Figura 4.11



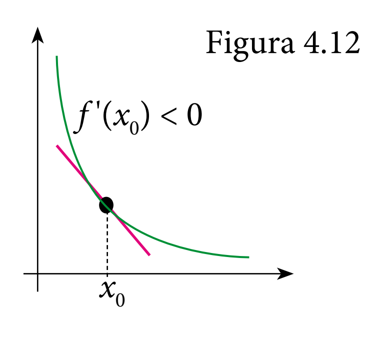



Figura 4.12

Hasta ahora se ha analizado la monotonía de las funciones, o sea sus intervalos decrecimiento y decrecimiento, apoyándonos fundamentalmente en su gráfica; los teoremas 1 y 2 permitirán obtener criterios analíticos sencillos para el análisis de la monotonía de una función en un intervalo.

**Teorema 1(fig. 4.13)**
Si $f$ es una **función derivable en el intervalo (*a*, b)** y para cada $x_0$ con $a < x_0 < \text{b}$ se cumple $\boldsymbol{f'(x_0)>0}$, entonces la función $f$ **es estrictamente creciente en el intervalo dado.**

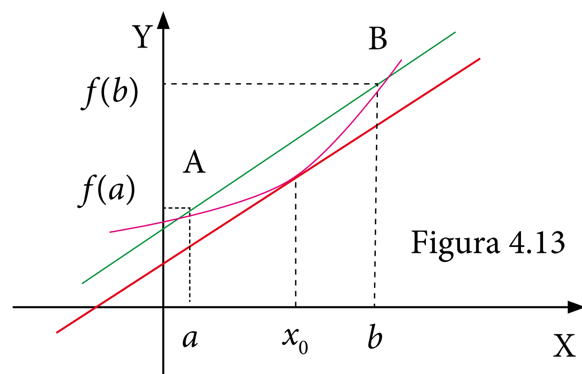


Figura 4.13

De manera análoga se enuncia el siguiente teorema:

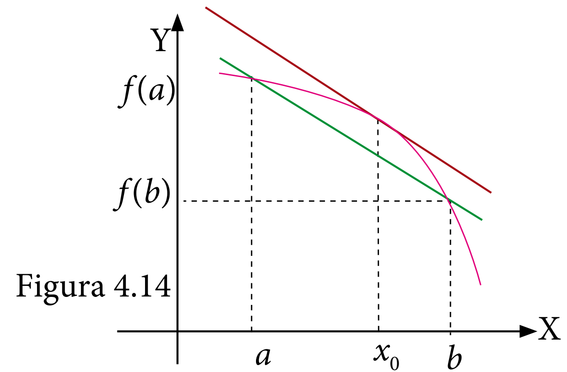


Figura 4.14

**Teorema 2(fig. 4.14)**
Si $f$ es una **función derivable en el intervalo (*a*, b)** y para cada $x_0$ con $a < x_0 < \text{b}$ se cumple $f'(x_0) < 0$, entonces **la función $f$ es estrictamente decreciente en el intervalo dado.**

Los teoremas 1 y 2 permiten reducir el análisis del crecimiento y decrecimiento de una función al análisis del signo de la derivada de la función.

**Ejemplo 12:** Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$$y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 1$$

**Resolución:** Primero se calcula la derivada de la función dada $y' = x^2 + 2x$, luego hay que determinar los ceros de la función derivada:

$$y' = x(x+2) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \text{ ó } x = -2$$

Después se determina en qué intervalos la derivada es positiva o negativa, y basta analizar el signo de esa expresión en los diferentes intervalos delimitados por los ceros de la derivada. Para ello se acostumbra a representar sobre un eje numérico la situación para precisar el signo de la derivada, como en la figura 4.15.

+ ● −2 − ● 0 +

Figura 4.15

En dicho gráfico se marcan los ceros de la función y ya así quedan determinados los intervalos, y se coloca un signo **+** o un signo — según sea el signo de la función derivada en cada intervalo. Observa en la figura 4.15 que hay tres intervalos a considerar: $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$ y $(0, +\infty)$.

**Nota: A partir de ahora ten en cuenta que el análisis de la monotonía de las funciones siempre se hace de izquierda a derecha.**

Para determinar el signo de $y' = f'(x)$ en cada intervalo evalúas la derivada en un punto cualquiera de dicho intervalo, por ejemplo si es el $(-\infty, -2)$ vas a obtener un número positivo y lo mismo va a suceder con el intervalo $(0, +\infty)$. Por el contrario si evalúas la función en un punto cualquiera del intervalo $(-2, 0)$ comprobarás que obtienes un número positivo. Por ejemplo:

Como, $f'(-3) = (-3)^2 + 2(-3) = 3 > 0$, $y'$ es positiva en $(-\infty, -2)$.

Como, $f'(-1) = (-1)^2 + 2(-1) = -1 < 0$, $y'$ es negativa en $(-2, 0)$, o en $-2 < x < 0$.

Como, $f'(1) = (1)^2 + 2(1) = 3 > 0$, $y'$ es positiva en $(0, +\infty)$.

Como cosa curiosa observa que los signos se van alternando, cosa que sucede con muchas de las funciones que conoces. Por lo tanto la función es estrictamente creciente en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(0, +\infty)$ y decreciente en el intervalo $(-2, 0)$.

Si se hace un esbozo del gráfico de la función utilizando un procesador, la misma se comporta aproximadamente como en la figura 4.16 y se puede ver que crece y decrece en los intervalos obtenidos.

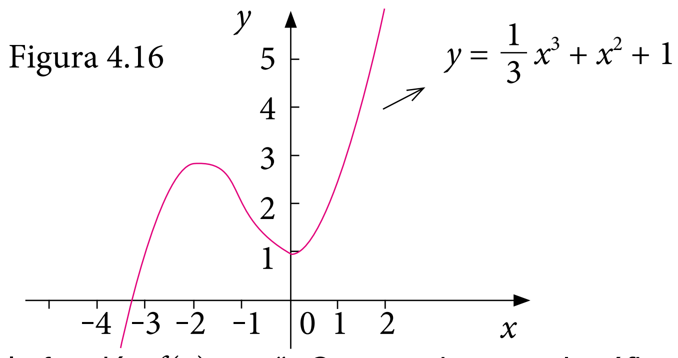



Figura 4.16

**Ejemplo 13:** Analiza la monotonía de la función $f(x) = xe^x$. Comprueba con el gráfico en un ordenador.

**Resolución:**

Se procede de la misma manera que en el ejemplo anterior, se deriva la función $f'(x) = e^x(x+1)$, y se le hallan los ceros a la derivada para con ello poder determinar los intervalos de prueba donde la derivada cambia de signo.

En este caso Como $e^x > 0$, para todo $x$, el signo de la derivada depende solamente del signo de $x+1$. Pero esa expresión se hace 0 en $x = -1$, luego los intervalos de prueba son: $-\infty < x < -1$ y $-1 < x < +\infty$.

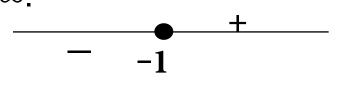



Figura 4.17

Como $f'(x) = e^x(x+1)$ es negativa si $x < -1$ y positiva si $x > -1$ (fig 4.17) .

La función es estrictamente decreciente si $x < -1$ y creciente si $x > -1$.

Un esbozo aproximado, con Derive del gráfico de la función dada es el mostrado en la figura 4.18.

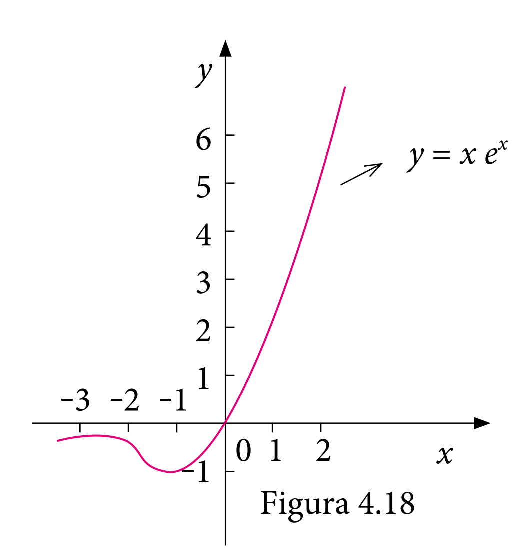



Figura 4.18

**Ejemplo 14:** Determina los intervalos de monotonía de la función $y = x^3$.

**Resolución:**

El procedimiento es el mismo, o sea determinar en qué intervalos la derivada es positiva o negativa, para lo cual es necesario primero determinar sus ceros.

En este caso, como la derivada de $\boldsymbol{x^3}$ es $\boldsymbol{3x^2}$ ella siempre es positiva excepto en 0. O sea se cumple que $y' = 3x^2 > 0$ para todo $x \in \Re$, $x \neq 0$, por lo tanto la función **es estrictamente creciente** para $x > 0$ y para $x < 0$. Se dice que l**a función es creciente en todo su dominio (Ver figura 4.19).**

Como la función es continua en $x = 0$, entonces la función $y = x^3$ es creciente en todo $\Re$.

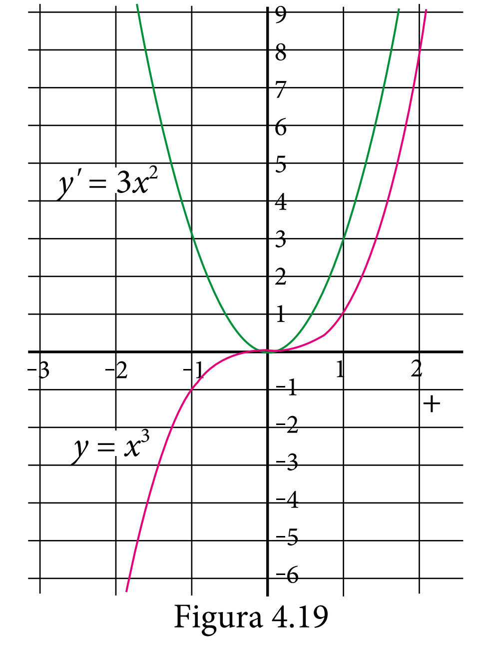



Figura 4.19

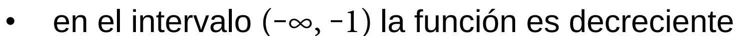
**Ejemplo 15:** En la figura 4.20 aparece representada la gráfica de una cierta función.

a) Según lo que se observa en dicho gráfico di en cuáles intervalos la función representada es creciente y en cuáles decreciente.

b) ¿Qué puedes decir del signo de su primera derivada en dichos intervalos?

**Resolución**

a) Por lo que se observa en el gráfico, analizándolo de izquierda a derecha y teniendo en cuenta que la función no está definida en $-1$ ni en $1$, se tiene que:



- en el intervalo $(-\infty, -1)$ la función es decreciente
- en el intervalo $(-1, 0)$ es decreciente
- en el intervalo $(0\ , 1)$ es creciente
- en el intervalo $(1, +\infty)$ la función es decreciente

b) La derivada de la función debe ser positiva en el intervalo $(0, 1)$ que es donde la función es creciente y negativa en los restantes pues es donde es decreciente.

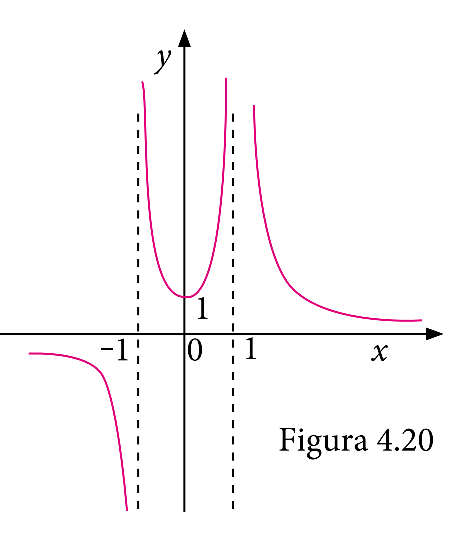


Figura 4.20

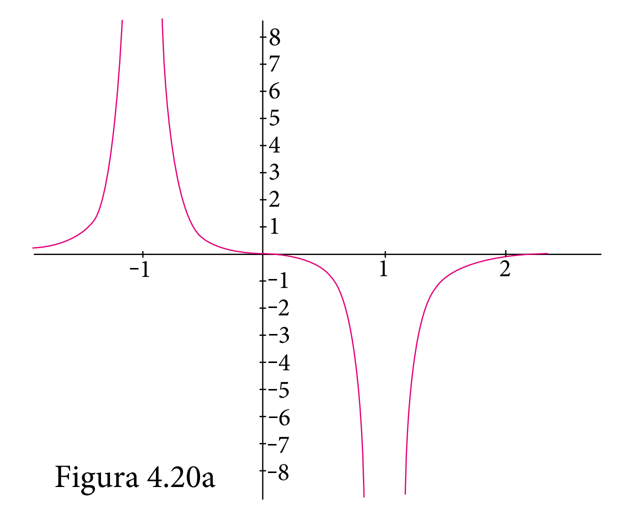


Figura 4.20a

**Ejemplo 16:** La figura 4.20a es la gráfica de la función $g(x) = -\dfrac{4x^3}{(x^4 - 1)^2}$ que es la derivada de una cierta **función $f(x)$.**

¿Cuál de las dos gráficas 4.20b o 4.20c que aparecen debajo puede ser la de la **función $f(x)$**? Argumenta.

**Resolución:**

La función $f(x)$ cuya derivada es la función $g(x)$ es la que tiene como gráfica la figura 4.20b) pues se cumple que $f(x)$ es creciente en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(-1, 0)$ que es donde la derivada $g(x)$ es positiva. De igual modo $f(x)$ es decreciente en los intervalos $(0, 1)$ y $(1, \infty)$ que es donde $g(x)$ es negativa. La otra nunca lo podría hacer porque por ejemplo en el intervalo $(-\infty, -1)$, ella decrece y en ese mismo intervalo $g(x)$ es positiva.

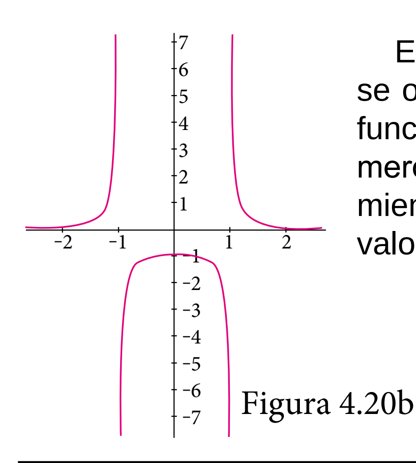


Figura 4.20b

En los ejemplos anteriores se observa que el dominio de la función puede dividirse en un número finito de intervalos de crecimiento y de decrecimiento (intervalos de monotonía).

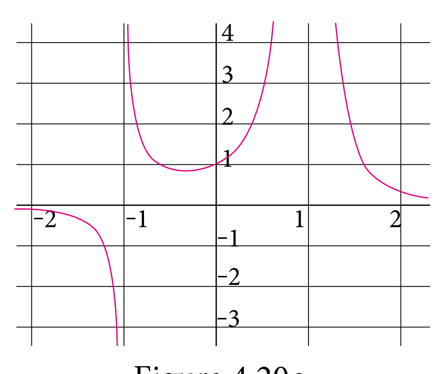


Figura 4.20c

Estos intervalos están limitados por puntos críticos, es decir, puntos donde $f'(x) = 0$ ó $f'(x)$ no existe. Tal división del dominio de la función en intervalos de monotonía puede hacerse para todas las funciones que estudiarás en este libro.

***ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE:***

**Act-19)** La figura 4.21 muestra el gráfico de la derivada de la función $f$. Determina los intervalos de monotonía de la función $f$.

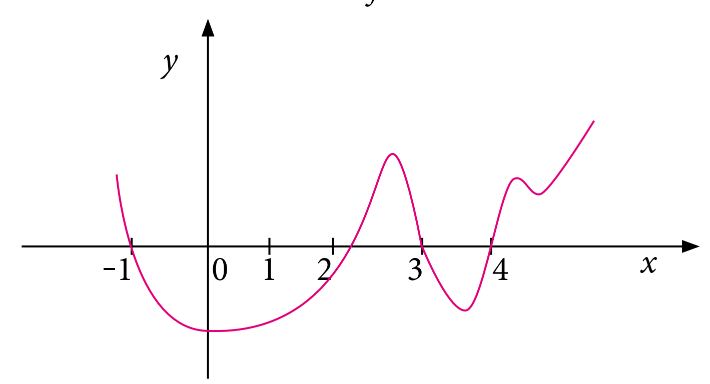



Figura 4.21

**Act-20)** ¿Es posible que una función $f$ sea decreciente en el intervalo [a, b] y exista $x_0$ con $a \le x_0 \le b$ tal que

a) $f'(x_0) = 0$ b) $f'(x_0) > 0$ c) $f'(x_0)$ no existe

**Act-22)** Demuestra que si el ángulo de inclinación de las tangentes a la curva $y= f(x)$ en cada uno de sus puntos es agudo, entonces la función $f$ es creciente, y si es obtuso, decreciente.

**Act-23)** Determina los intervalos de monotonía de la función. Comprueba trazando el gráfico en un procesador:

a) $y = -x^2$
b) $y = (x - 3)^2$
c) $y = \sqrt{25 - 4x^2}$
d) $y = \sqrt{x - 4}$
e) $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$
f) $y = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$
g) $y = x^3 - 8$
h) $y = \frac{1}{x - 2}$
i) $y = 2 + x^{\frac{2}{3}}$
j) $y = x^{\frac{4}{3}}(1 - x)^{\frac{1}{3}}$
k) $y = x(12 - 2x)^2$
l) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x + 1$
m) $y = x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 2x^2$
n) $y = x^5 + \frac{10}{3}x^3 + 5x - 2$

**Act-24)** Analiza la monotonía de la función. Comprueba trazando el gráfico en un procesador:

a) $y = x^4+4x^3-34x^2-12x$
b) $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3$
c) $y = \operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x \ (0 \le x \le \pi)$
d) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x - 4$
e) $y = (x + 4)^3$
f) $y = x^2(x - 3)$

g) $y = \dfrac{x}{x-2}$ h) $y = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ i) $y = \dfrac{x}{x^2-6x-16}$

j) $y = (x-3)\sqrt{x}$ k) $y = \dfrac{x}{3} - \sqrt[3]{x}$ l) $y = x + \text{sen } x$

m) $y = x \cdot \ln x$ n) $y = 2e^{x^2-4x}$ ñ) $y = e^{\frac{1}{x-3}}$

o) $y = \dfrac{e^x}{x}$ p) $y = e^x(x^2-2x)$ q) $y = x\ln^2 x$

r) $y = x^2 e^{-x}$ s) $y = \sqrt{x(10-x)}$

**Act-25)** Demuestra que $y = x^5 + 20x - 6$ es una función creciente. Comprueba trazando el gráfico en un procesador.

**Act-26)** Demuestra que $y = 1 - x^3 - x^7$ es una función decreciente. Comprueba trazando el gráfico en un procesador.

**Determinación de extremos locales de una función**

En los gráficos de algunas funciones antes vistas ha sucedido que en determinados intervalos la función alcanza un valor mayor que los demás, o menor que ellos, o también que no haya uno menor o mayor que los demás. Por ejemplo:

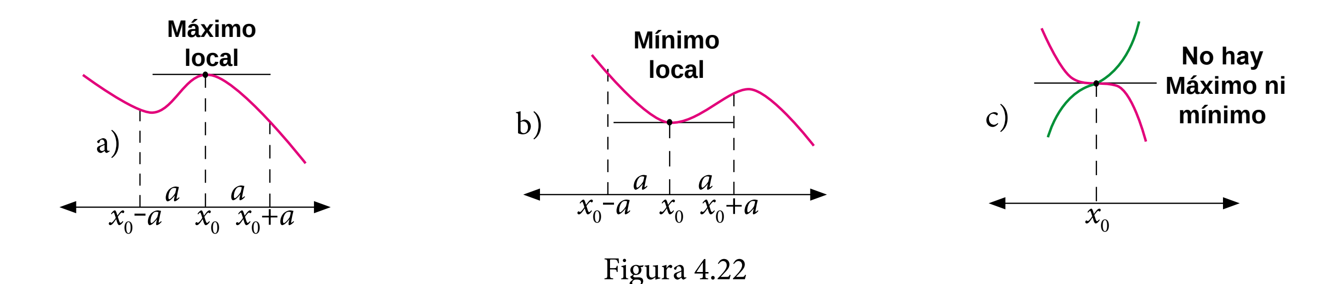



Figura 4.22

A estos valores que en un cierto intervalo son mayores o menores que todos los demás se les llaman **extremos locales o relativos de la función.**

**Máximos y mínimos relativos de una función**

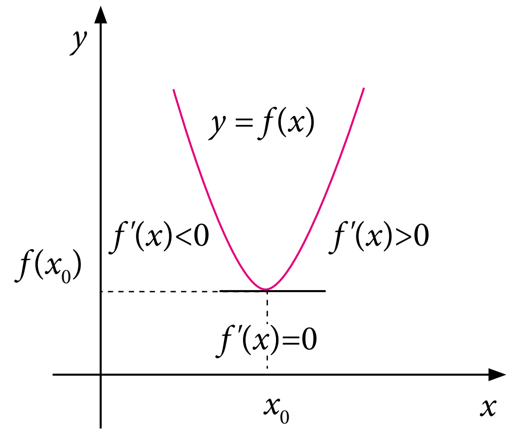
- Un punto $x_0$ es un **máximo local** de una función $f$, si el valor $f(x_0)$ es **mayor** que todos los valores que toma la función en un intervalo del tipo $(x_0-a, x_0+a)$.
- Un punto $x_0$ es un **mínimo local** de una función $f$, si el valor $f(x_0)$es menor que todos los valores que toma la función en un intervalo del tipo $(x_0-a, x_0+a)$.
- Una función **puede tener varios extremos locales** y al mayor (menor) de todos ellos se le llama máximo absoluto (mínimo absoluto). De igual modo **puede suceder que una función no tenga ningún extremo relativo.**

Para la existencia se extremos locales de una función hay que tener en cuenta el siguiente teorema.

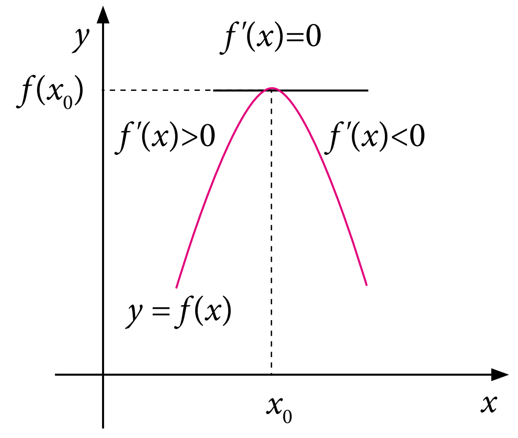
**Teorema 3.** Para que una función derivable en $x_0$ tenga un extremo local en $x_0$ es necesario que se cumpla que: $f'(x_0) = 0$.

Desde el punto de vista geométrico el teorema expresa que si una función $f$ derivable en $x_0$ tiene un extremo local en $x_0$ entonces la tangente al gráfico en ese punto tiene pendiente $m$=0, es decir, la tangente es paralela al eje X. (fig. 4.23).

Del teorema 1 se deduce que los puntos en los que una función derivable tiene extremos locales están entre los que satisfacen la condición $f'(x) = 0$ y de nuevo encontramos una aplicación de las derivadas al análisis de curvas.




**$f(x_0)$ es un mínimo local (la función pasa de decreciente a creciente)**

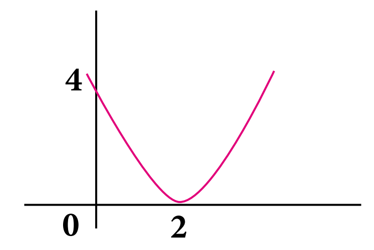



**$f(x_0)$ es un máximo local (la función pasa de creciente a decreciente)**

Figura 4.23

La determinación de extremos locales y el crecimiento de una función están relacionados. A continuación se verá un procedimiento que permite determinarlos a ambos.

| **Procedimiento para determinar la monotonía y los extremos locales de una función.** | |
|---|---|
| **Ejemplo 17:** $y = x^2 - 4x + 4$ | |
| 1. Se calcula la primera derivada de la función. | $y' = 2x - 4$ |
| 2. Se determinan los ceros de la derivada, o sea los puntos donde ella se anula (puntos críticos). En este caso $x = 2$ es un cero y es el único. | $2x - 4 = 0$<br>$2x = 4$<br>$x = 2$ |
| 3. Se investiga los signos de la derivada en los intervalos determinados por los ceros. En este caso solo son: $(-\infty, 2)$ y $(2, +\infty)$ | – 2 + |

| | |
|---|---|
| 4. Como la derivada es negativa para $x<2$ ahí la función es decreciente y como es positiva para $x>2$ ahí la función es creciente. Además, como la derivada pasa de negativa a positiva en 2, en ese punto hay un mínimo local.<br><br>Ese valor mínimo se calcula evaluando la función en $x=2$. En este caso<br>$y=(2)^2-4(2)+4=4-8+4=0$<br><br>Por tanto, se dice que la función **tiene un mínimo en 2 y que ese valor mínimo es 0.**<br><br>También se puede decir que la gráfica de la función tiene un mínimo en $(2, 0)$. | **Un esbozo aproximado de la gráfica de la función dada es el siguiente:**<br><br><br><br><br>**Después tendrás más elementos para hacer la gráfica más cercana a la realidad.** |

En el ejemplo anterior la función $y=x^2-4x+4$ tenía un **extremo local en 2** a partir de que en ese punto **la derivada tenía un cero y cambiaba de signo en dicho cero.** Algo muy importante que debes conocer es que la condición $f'(x_0)=0$ **no es suficiente para la existencia de extremos**, es decir, una función puede tener derivada $y'=0$ en un punto y no tener extremo en ese punto. Por ejemplo, para la función $f(x)=x^3+2$ se cumple $f'(x_0)=0$ pero no tiene extremo local en $x_0=0$ (fig. 4.24a)

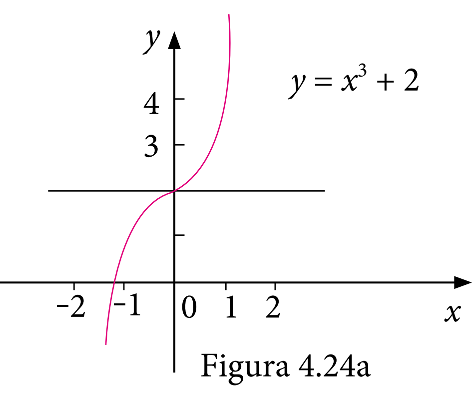


Figura 4.24a

De igual modo existen funciones que no tienen derivada en un punto, pero si poseen extremo. Por ejemplo, la función $y=|x+1|$ (fig. 4.24b) no es derivable en $x=-1$, pero tiene un mínimo local en ese punto.

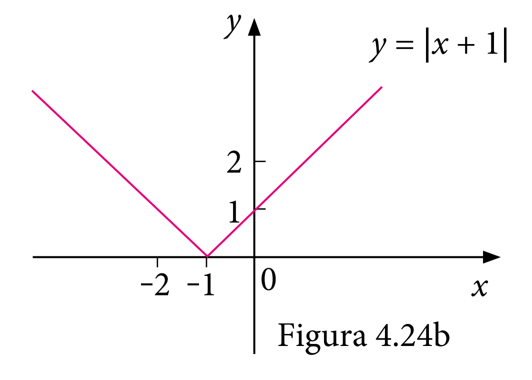


Figura 4.24b

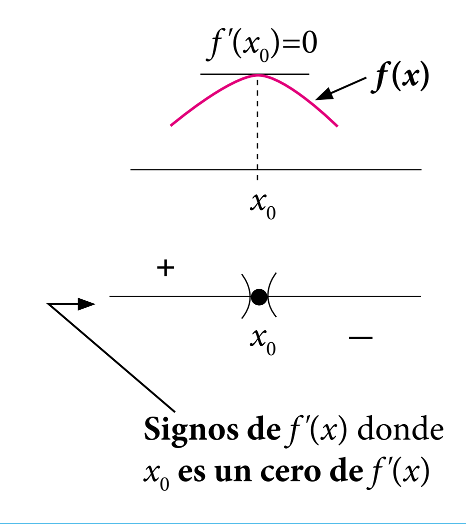
En la práctica es necesario un criterio que nos permita afirmar que una función tiene un extremo local. Un análisis de la figura 4.22 nos permite afirmar:

- **Si $f(x)$ crece en $(x_0-a, x_0)$ y decrece en $(x_0, x_0+a)$ se trata de un máximo local.**
- **Si $f(x)$ decrece en $(x_0-a, x_0)$ y crece en $(x_0, x_0+a)$ se trata de un mínimo local.**

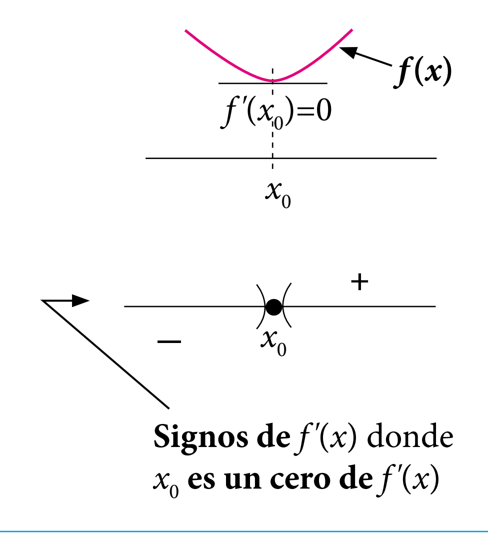
Como el crecimiento está determinado por el signo de la derivada se tiene que:

**Sea una función $f$ derivable en un cierto intervalo y $x_0$ es un punto de ese intervalo.**

$f(x_0)$ es un máximo local si la derivada $f'(x)$ **pasa de positiva a negativa** en ese intervalo.




$f(x_0)$ es un **mínimo local** si la derivada $f'(x)$ **pasa de negativa a positiva** en ese intervalo.




**Ejemplo 18:** Analiza en qué puntos es posible que tenga extremos locales la función

a) $y = 4x^2+2x$ b) $y = 5x + 1$ c) $y = x^3 + 2$

d) $y = 4\text{sen } x + 3$ e) $y = \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$

**Resolución:** Como solo piden los puntos donde haya posibles extremos basta con hallar los ceros de la primera derivada.

a) $y = 4x^2 + 2x \Rightarrow y' = 8x + 2 = 0 \Rightarrow x = -0.25 \Rightarrow P(-0.25, f(-0.25))$ es posible.

b) $y = 5x + 1 \Rightarrow y' = 5 \neq 0$. La función no tiene extremos locales para todo $x$.

c) $y = x^3 + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \text{P}(0,2)$ es el único punto posible.

d) $y = 4 \text{ sen } x + 3 \Rightarrow y' = 4\cos x$. Resolviendo la ecuación $y' = 0$ obtenemos que

$4\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow$ Todos los puntos de abscisa $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in$ Z son los posibles extremos locales.

e) $y = \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1 \Rightarrow y' = 5x^2 + x - 3 = 0$. Entonces los puntos de abscisa

igual a $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{61}}{10} \Rightarrow x_1 \approx 0{,}681$ y $x_2 \approx -0{,}881$ son los posibles extremos.

**Ejemplo 19:** Determina los extremos locales de la función $f(x) = x^3-12x - 4$.

**Resolución:** En este caso, a diferencia del anterior, sí piden los extremos locales y por eso no basta con hallar los ceros de la primera derivada sino también comprobar que la derivada cambia de signos en los intervalos determinados por los ceros.

En este caso, como $f(x) = x^3-12x-4$, derivando e igualando a cero se obtiene que $f'(x)=3x^2-12=3(x^2-4)=0$. De donde, los ceros de $f'(x)$ son $x_1=2$ y $x_2=-2$.

Al analizar el signo de $f'(x)$ encontramos que $f'(x) > 0$ en $(-\infty, -2)$ y en $(2, +\infty)$, $f'(x) < 0$ en $(-2, 2)$ tal como muestra la figura 4.25.

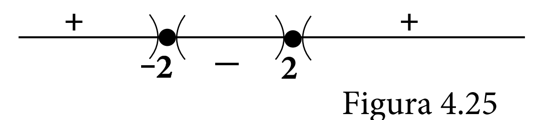


Figura 4.25

Luego en $x=-2$, como $f'(x)$ pasa de valores positivos a negativos, se trata de un máximo que es $y_{max} = f(-2) = 12$. Y en $x=2$, $f'(x)$ pasa de valores negativos a positivos, por tanto se trata de un mínimo que es $y_{min} = f(2) = -20$.

***ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE:***

**Act-27)** ¿Es posible que una función tenga un extremo local en $x_0$ y no se cumpla $f'(x_0) = 0$ ? Pon un ejemplo.

**Act-28)** Esboza el gráfico de una función $f$ que tenga un máximo local en $x=1$ y un mínimo local en $x=3$ tal que:

a) $f(1) = 3$ y $f(3)=7$

b) $f'(1) \neq 0$ y $f'(3) = 0$

c) $f(1) = f(3)$

d) $f(1) = f'(1) = f(3) = f'(3)$

**Act-29)** La figura 4.26 muestra la gráfica de la derivada de la función $f$. Determina todos los puntos en los que $f$ tiene extremos locales.

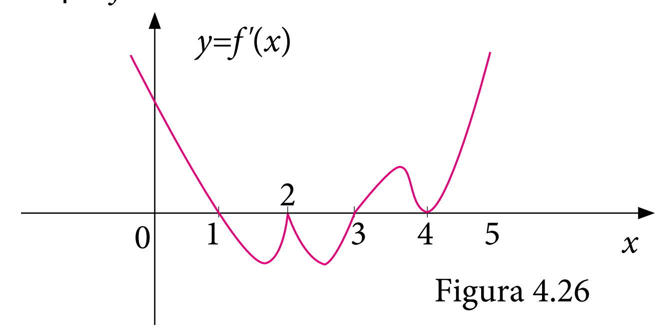


Figura 4.26

**Act-30)** Demuestra que la función $f$ dada carece de extremos:

a) $f(x) = \dfrac{2}{2x+3}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$

c) $f(x) = \dfrac{ax+c}{cx+d}$

**Act-31)** Determina los intervalos de crecimiento y los extremos locales de la función:

a) $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$

b) $y = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$

c) $y = x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 2x^2$

d) $y = x^5 + \frac{10}{3}x^3 + 5x - 2$

**Act-32)** Calcula los máximos y los mínimos locales de las siguientes funciones. (Sugerencia: Comprueba trazando el gráfico en un procesador)

a) $f(x) = 3 + 2x - x^2$

c) $y = x^2 + \dfrac{250}{x}$

c) $f(x) = x(12 - 2x)^2$

d) $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

e) $f(x) = e^{\text{sen } x}$

f) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$

g) $f(x) = e^{\cos x}$

h) $y = \left(x^2 - 4\right)^2$

i) $y = x^3 + \dfrac{48}{x}$

j) $y = 2x^3 + 7x$

k) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4 - x}$

l) $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^2}$

m) $f(x) = \text{sen } x + \dfrac{1}{2}\text{sen } 2x$

n) $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x}$

ñ) $f(x) = \sqrt{8 + x} - \sqrt{8 - x}$

o) $f(x) = \sqrt[3]{x + 1} - \sqrt[3]{x - 1}$

p) $f(x) = x^2 \, ln \, x$

q) $f(x) = \cos x - ln \cos x$

r) $f(x) = 2x - \tan x$

s) $f(x) = (\text{sen } x + \cos x)^{-1}$

**Act-33)** Determina en el intervalo $0 \le x \le 2\pi$, los extremos locales (máximo o mínimo) de las siguientes funciones.

a) $y = \dfrac{1}{2}\text{sen } 2x$

b) $y = \cos^2 x - \cos x$

c) $y = x - 2 \text{ sen } x$

d) $y = (\text{sen } x)\,(1 + \cos x)$

e) $y = 4\cos^3 x - 3 \cos x$

f) $y = 1 - 7\text{sen}\left(\pi + \dfrac{x}{8}\right)$

g) $y = 4\text{sen } x - 3 \cos x$

h) $y = (\text{sen } x)(1 - 2 \cos x)$

**Act-34**) ¿Para qué valores de $k$, $y = k \text{ sen } x + \dfrac{1}{3}\text{sen } 3x$ tiene un extremo en $x = \dfrac{\pi}{3}$?

**Act-35)** Determina los valores de a y b para los cuales la función $y = a \, ln \, x + bx^2 + x$ tiene extremos en los puntos $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$.

**Act-36)** Demuestra la desigualdad $e^x \ge x + 1$. (Sugerencia: Prueba que la función $f(x) = e^x - x - 1$ toma su valor mínimo para $x = 0$.)

**Act-37)** Demuestra las siguientes desigualdades:

a) $\text{sen } x < x$, para $x > 0$

a) $ln(x + 1) < x$, para $x > 0$

**Determinación de la concavidad y puntos de inflexión de una función**

En esta figura que ya antes utilizaste (Fig. 4.27) puedes apreciar que la gráfica “mira o abre hacia abajo” en un cierto intervalo que va desde $-\infty$ hasta un cierto punto cuya abscisa está en los alrededores de $-1$, y “mira o abre hacia arriba” a partir de dicho punto hasta $+\infty$.

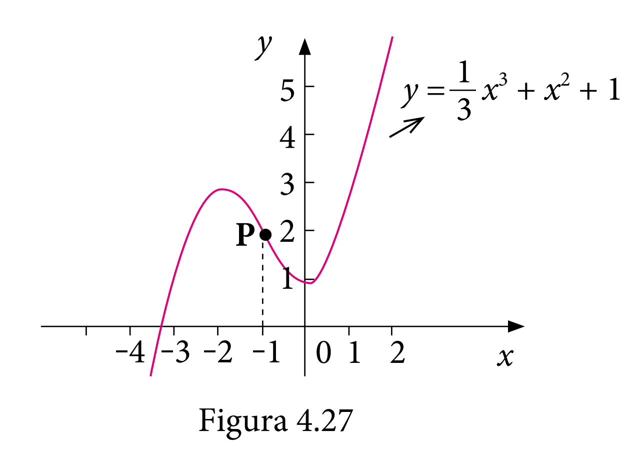



Figura 4.27

Esa parte de la gráfica de la función que "mira o abre hacia abajo" se le denomina **cóncava hacia abajo** o **convexa**, y a la de "mirar o abrir hacia arriba" se denomina **cóncava hacia arriba** o simplemente **cóncava**.

En el punto **P** de la gráfica hay un cambio del sentido de la concavidad y a dicho punto se le llama **punto de inflexión.**

Esta propiedad tiene que ver con la segunda derivada de la función. Busquemos entonces la primera derivada de la función y la derivada de esta que es la segunda derivada de la función.

Para la función dada $y=\frac{1}{3}x^3+x^2+1$, su primera derivada es $y'=x^2+2x$ y la segunda derivada es $y''=2x+2$.

Tratemos ahora de seguir las ideas anteriores de determinar los ceros y analizar los signos en los intervalos dados, pero ahora con la derivada de la función y su derivada. Los ceros de la derivada $y'=x^2+2x=x\,(x+2)$, son $x=0$ y $x=-2$.

+ −2 − 0 +

Figura 4.28

Ya sabemos que estos son los puntos de los extremos locales de la función original y los intervalos que se obtienen son los de la monotonía de la función, o sea, donde crece y decrece la función.

**Calculemos ahora los ceros de la segunda derivada y sus signos en los intervalos que surjan.** Como $y''=2x+2$ hay un solo cero que es en $x=-1$. Se tiene que:

$f''(x_0)<0$ − −1 + $f''(x_0)>0$

Figura 4.29

De lo antes obtenido se concluye que la segunda derivada de la función es negativa para $x < -1$ y positiva para $x > -1$.

**¿Será entonces -1 la abscisa del punto P en donde la función original cambia el sentido de su concavidad? ¿Es cóncava hacia abajo cuando la segunda derivadaes negativa y cóncava hacia arriba donde esta es positiva?**

Aunque en este curso no vamos a demostrar estos resultados, efectivamente hemos arribado a ideas que se van a formalizar (en el teorema 4) y nos van a permitir tener más información acerca de las gráficas de funciones dadas y de sus propiedades.

**Teorema 4.**
**Sea $f$ una función que tiene segunda derivada en $x_0$. Se cumple que:**
**Si $f''(x_0) \geq 0$ entonces $f$ es cóncava hacia arriba en $x_0$**
**Si $f''(x_0) \leq 0$ entonces $f$ es cóncava hacia abajo en $x_0$**
**Si $f''(x_0) = 0$ entonces $f$ cambia de sentido de su concavidad en $x_0$, o sea tiene un punto de inflexión en $x_0$.**

Este teorema se puede justificar intuitivamente si nos damos cuenta que en donde la $f''(x_0) \geq 0$ la derivada de $f$ es creciente (por el Teorema 1), o sea las pendientes de las rectas tangentes a la curva son valores crecientes hasta llegar al punto de inflexión que es el cero de la segunda derivada.

De igual modo en donde $f''(x_0) \leq 0$ la derivada de $f$ es decreciente (por el Teorema 2), o sea las pendientes de las rectas tangentes a la curva son valores que van decreciendo hasta llegar al punto de inflexión. En ambos casos hay un significado geométrico.

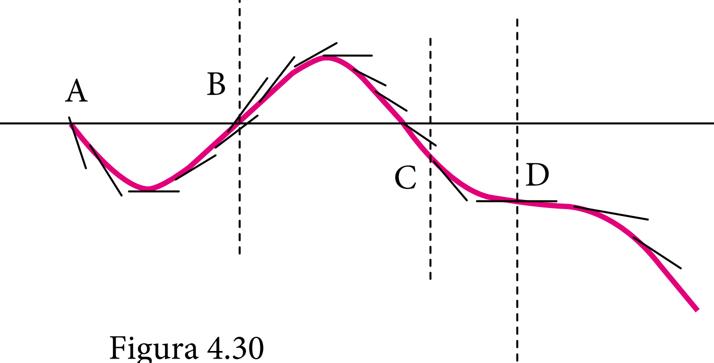


Figura 4.30

Observen en la figura 4.30 que en el tramo AB las cinco tangentes representadas van aumentando sus pendientes hasta llegar a B. En el tramo BC las tangentes trazadas empiezan a disminuir sus pendientes hasta llegar a C donde empiezan a aumentar, pero en D vuelven a disminuir.

Lo anterior significa que en el tramo AB la función es cóncava hacia arriba, en el BC cóncava hacia abajo, en el CD cóncava hacia arriba y a partir de D es cóncava hacia abajo. **En B, C y D hay puntos de inflexión.**

**Ejemplo 20:** En la figura 4.31 aparecen representadas $f'(x)=3x^2$ y $f''(x)=6x$ que son respectivamente la primera y la segunda derivada de la función $y=f(x)$.

a) Di qué características tiene la función $f$ en cuanto a monotonía y extremos locales. Argumenta.
b) ¿En cuáles intervalos la función $f$ es cóncava hacia arriba y en cuáles es cóncava hacia abajo? Argumenta.
c) Di si hay algún punto de inflexión y argumenta.
d) Comprueba que la función $f(x)=x^3$ es la función original.

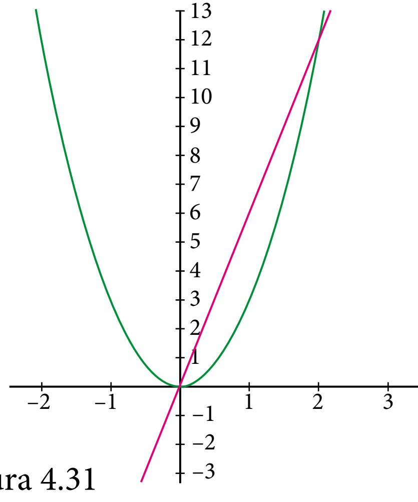


Figura 4.31

**Resolución:**

a) Como la primera derivada es siempre positiva (su gráfica está sobre el eje X) la función $f$ siempre es creciente por lo que no tiene extremos locales.

b) En el intervalo $(-\infty, 0)$ la función $f$ es cóncava hacia abajo porque la segunda derivada es negativa (su gráfica está por debajo del eje X) y en el intervalo $(0, +\infty)$ es cóncava hacia arriba porque la segunda derivada es positiva (su gráfica está por arriba del eje X.

c) En $x=0$ hay un punto de inflexión porque ahí la segunda derivada cambia de signo, o porque la función cambia de sentido de concavidad (de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba).

d) Para ello basta derivarla y ver si su derivada coincide con la dada. En este caso eso se cumple pues $f'(x) = (x^3)' = 3x^2$.

**Ejemplo 21:** La figura 4.32 es la gráfica de la función $y = \frac{x^5}{20} - \frac{x^3}{6}$

a) Determina los intervalos donde la función es cóncava hacia arriba y donde es cóncava hacia abajo, así como los puntos de inflexión si existen.

b) Calcula los puntos de extremos locales y comprueba que donde hay un mínimo la función es cóncava hacia arriba y por tanto la segunda derivada es positiva. Concluye qué pasaría entonces con la segunda derivada donde hay un máximo.

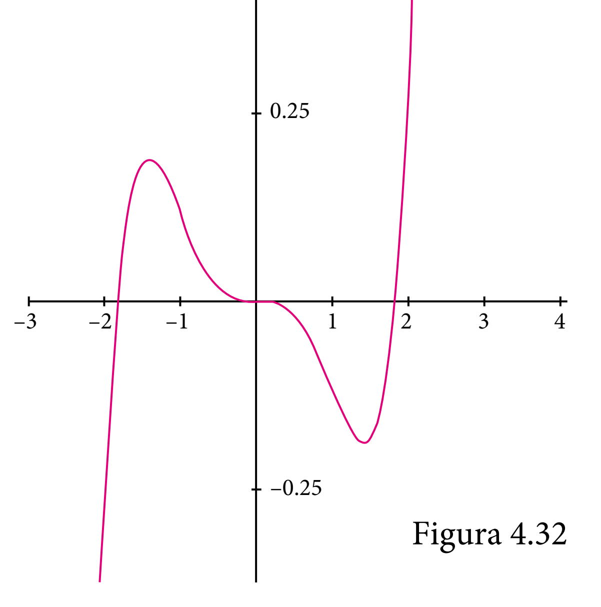


Figura 4.32

**Resolución:**

a) Hay que comenzar calculando la segunda derivada de la función $y$, determinar sus ceros y los intervalos donde cambia de signo. Derivando se tiene que:

$$y = \frac{x^5}{20} - \frac{x^3}{6} \Rightarrow y' = \frac{5x^4}{20} - \frac{3x^2}{6} = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \Rightarrow y'' = \frac{4x^3}{4} - \frac{2x}{2} = x^3 - x$$

Como $y'' = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x+1)(x-1)$ entonces sus ceros son -1, 0, y 1. Evaluando la función en un punto cualquiera en cada intervalo se tienen los signos de la segunda derivada en cada uno de ellos como se indica en la figura 4.33.

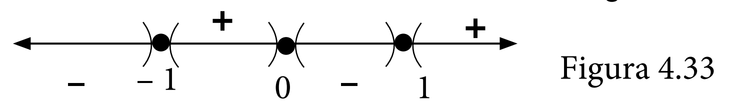


Figura 4.33

Analizando lo obtenido la función dada es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-\infty, -1)$, cóncava hacia arriba en el intervalo $(-1, 0)$, cóncava hacia abajo en el intervalo (0, 1) y cóncava hacia arriba en el intervalo $(1, +\infty)$ pues en ellos los signos de la segunda derivada son negativos, positivos, negativos y positivos respectivamente. Los puntos de inflexión son **−1, 0, y 1**.

b) Para calcular los puntos donde hay extremos locales hay que buscar los ceros de la primera derivada que ya antes se calculó y los signos de los intervalos que quedan determinados por los ceros.

$$y' = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}\left(\frac{x^2}{2} - 1\right) = \frac{x^2}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 1\right)\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - 1\right)$$

Los ceros son $0$, $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$. En este caso como $\frac{x^2}{2}$ siempre es positiva, los signos de la derivada van a estar determinados por los otros dos factores.

Figura 4.34

Observen que en este caso **no hay cambio de signo en 0**, luego **el 0 no es un punto donde hay un extremo local**, aunque es un cero de la derivada.

En $-\sqrt{2}$ hay un máximo local pues la derivada cambia de positiva a negativa y en $\sqrt{2}$ hay un **mínimo local** pues la derivada cambia de negativa a positiva. Estos resultados se corresponden con la información que ya se tenía de la función a partir de su gráfica.

Para comprobar que la segunda derivada es positiva donde hay un mínimo basta evaluar la segunda derivada en $\sqrt{2}$. Se tiene entonces que:

Para $\sqrt{2}$ se tiene que $y'' = x^3 - x = x(x^2 - 1) = \sqrt{2}((\sqrt{2})^2 - 1) = \sqrt{2}(2 - 1) = \sqrt{2} > 0$

Luego la función en ese mínimo es cóncava hacia arriba.
Veamos ahora que sucede con el máximo local. Para $-\sqrt{2}$ se tiene que:

$$y'' = x^3 - x = x(x^2 - 1) = -\sqrt{2}((\sqrt{2})^2 - 1) = \sqrt{2}(2 - 1) = \sqrt{2} < 0$$

Luego la función en ese máximo es cóncava hacia abajo.

Estos resultados son completamente lógicos si se analiza gráficamente la situación, pero lo importante es que se puede enunciar un nuevo criterio para determinar si un punto es extremo local a partir de la segunda derivada.

**Teorema 5.**

**Sea $f$ una función que tiene segunda derivada en $x_0$. Si** $f'(x_0)=0$ y $f''(x_0) \neq 0$, entonces $f$ tiene un extremo local en $x_0$. **Se cumple que:**

· **Si** $f''(x_0) > 0$ **el extremo es un mínimo local.**

· **Si** $f''(x_0) < 0$ **el extremo es un máximo local.**

· **Si** $f''(x_0) = 0$ **entonces es un punto de inflexión.**

**Ejemplo 22:** Calcula los valores extremos locales o relativos de la función

a) $y = x^2 e^x$ b) $y = 2\, sen\, 2x + 1, \quad 0 \le x \le \pi$

**Resolución:**

En este caso vamos a utilizar el teorema 5 que se acaba de introducir. O sea se calculan en la primera derivada los posibles ceros y se evalúa la segunda derivada en dichos ceros y en dependencia del signo obtenido se concluye si hay un máximo o un mínimo.

a) $y = x^2 e^x \Rightarrow y' = 2x \cdot e^x + x^2 e^x = (x^2 + 2x)\, e^x$

Como $e^x > 0$ para todo $x$, los ceros que hay que buscar son los de la ecuación $x^2 + 2x = 0$, o sea de $x\,(x + 2) = 0$, de donde $x = 0$ y $x = -2$.

$$y'' = e^x \left(x^2 + 2x\right) + e^x\,(2x + 2) = \left(x^2 + 4x + 2\right)e^x$$

Para $x = 0$, $y'' = 2 > 0$. Luego en 0 hay un mínimo local.

Para $x = -2$, $y'' = -2e^{-2} < 0$. Luego en $-2$ hay un máximo local.

Para completar la búsqueda se determinan esos valores máximos y mínimos de la función. Entonces en $x = 0$, $y_{\min} = 0$ y en $x = -2$, $y_{\max} = 4e^{-2}$.

b) Derivando la función e igualando a cero la derivada se obtiene que

$$y = 2 \text{ sen } 2x + 1, \quad 0 \le x \le \pi \Rightarrow y' = 4 \cos 2x \Rightarrow 4 \cos 2x = 0$$

$$\Rightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, \; k \in Z \Rightarrow x = (2k + 1)\frac{\pi}{4}$$

Como $0 \le x \le \pi$ entonces $x = \frac{\pi}{4}$ ó $x = \frac{3\pi}{4}$

Calculando $y'' = -8 \text{ sen } 2x$ y evaluando en los ceros antes obtenidos se tiene:

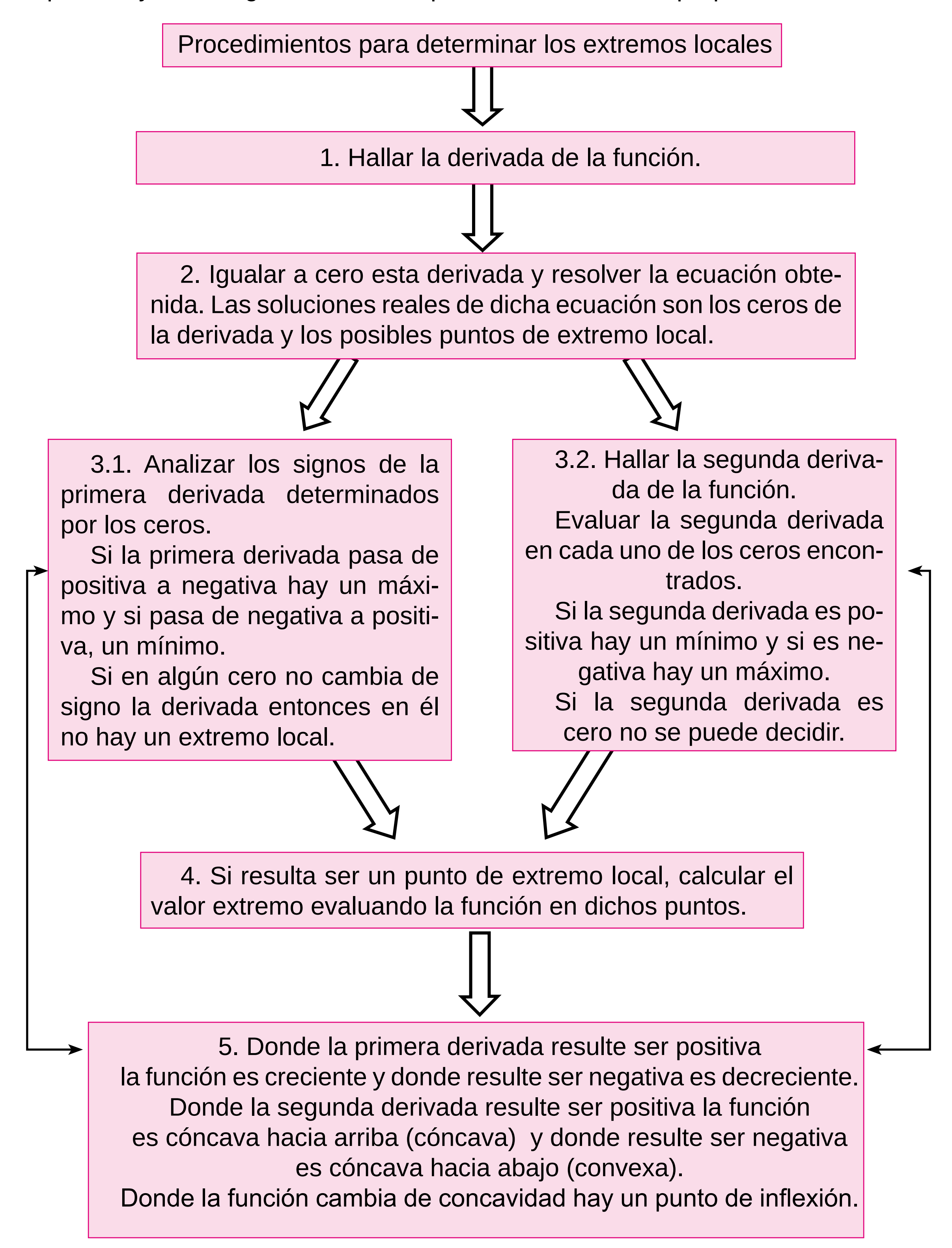
$$f(\pi/4)'' = -8 \text{ sen } \frac{\pi}{2} = -8 < 0 \quad \text{y} \quad f(3\pi/4)'' = -8 \text{ sen} \frac{3\pi}{2} = 8 > 0$$

Por tanto, los valores máximos y mínimos de la función son:

En $x = \frac{\pi}{4}$, $y_{\max} = 2 \text{ sen } \frac{\pi}{2} + 1 = 3$.

En $x = \frac{3\pi}{4}$, $y_{\min} = 2 \text{ sen} \frac{3\pi}{2} + 1 = -1$.

**En resumen**, es importante que te aprendas y puedas utilizar en la práctica los procedimientos para determinar los extremos locales de una función así como sus puntos de inflexión en caso de que existan. También lo que significa el conocimiento del signo de la primera y de la segunda derivada para el análisis de las propiedades de la función.





## ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE:

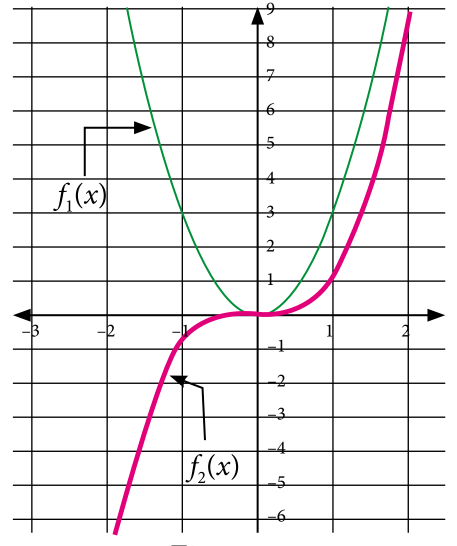


Figura 4.35

**Act-38)** La gráfica corresponde a las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ una de las cuales es la derivada de la otra. (Fig. 4.35).

a) En cada caso identifica donde crecen y donde decrecen cada una de dichas funciones, los extremos locales si los tienen, en qué intervalos son cóncavas hacia arriba y hacia abajo y si tienen puntos de inflexión.

b) Identifica cuál es la función original y cuál es la derivada y argumenta tu respuesta.

**Act-39)** La figura 4.36 corresponde a la gráfica de $y=\text{sen } x$. A partir de la gráfica determina, en el intervalo $(0, 2\pi)$:

a) Los máximos y mínimos de la función.
b) Los intervalos donde crece y donde decrece.
c) Los intervalos donde la función es cóncava hacia arriba y hacia abajo.
d) Los puntos de inflexión si existen.

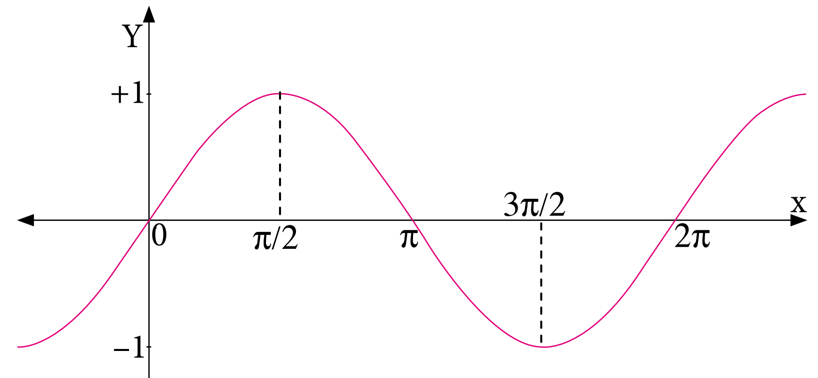


Figura 4.36

**Act-40)** Calcula los máximos y los mínimos locales de la función usando el criterio de la segunda derivada.

a) $f(x) = x(12 - 2x)^2$

b) $y = x^2 + \dfrac{250}{x}$

c) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

d) $f(x) = 3 + 2x - x^2$

e) $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

f) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$

g) $f(x) = (2 - x)^3$

h) $y = (x^2 - 4)^2$

i) $y = x^3 + \dfrac{48}{x}$

j) $y = 2x^3 + 7x$

**Act-41)** Determina los intervalos donde las siguientes funciones son cóncavas hacia arriba y cóncavas hacia abajo. Determina los puntos de inflexión. Comprueba trazando el gráfico en un procesador.

a) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4 - x}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^2}$

c) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$

d) $f(x) = \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$

e) $f(x) = (\operatorname{sen} x + \cos x)^{-1}$

f) $f(x) = \sqrt{8 + x} - \sqrt{8 - x}$

g) $f(x) = \sqrt[3]{x + 1} - \sqrt[3]{x - 1}$

h) $f(x) = e^{\cos x}$

i) $f(x) = \cos x - \ln \cos x$

j) $f(x) = 2x - \tan x$

k) $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x}$

l) $f(x) = x^2 \ln x$

**Graficación o representación gráfica de funciones**

La representación gráfica de funciones es algo muy importante cuando se quiere tener una idea objetiva del comportamiento de la función a partir de su gráfica. En la actualidad hay muchos recursos tecnológicos que te permiten representar funciones con cierta rapidez y exactitud, aunque en ocasiones la gráfica obtenida por esa vía no tiene todas sus propiedades originales pues el procesador matemático no las detecta.

No obstante las ventajas de la tecnología, no siempre esa tecnología la tenemos a mano cuando la necesitamos. Por tanto, el tener una idea rápida del comportamiento aproximado de una función puede ser necesaria en un momento dado.

Los conocimientos que has adquirido sobre las aplicaciones de la derivada al análisis de funciones, y otros que ya aprendiste en el estudio de las funciones en los capítulos anteriores, te permitirán con relativa facilidad hacer una representación bastante aproximada de funciones dadas por sus ecuaciones.

Del estudio de los capítulos anteriores ya debes haber memorizado algunas gráficas de funciones que se utilizan mucho en el estudio de la matemática. Por ejemplo $y=x^2$ así como $y = \sqrt{x}$

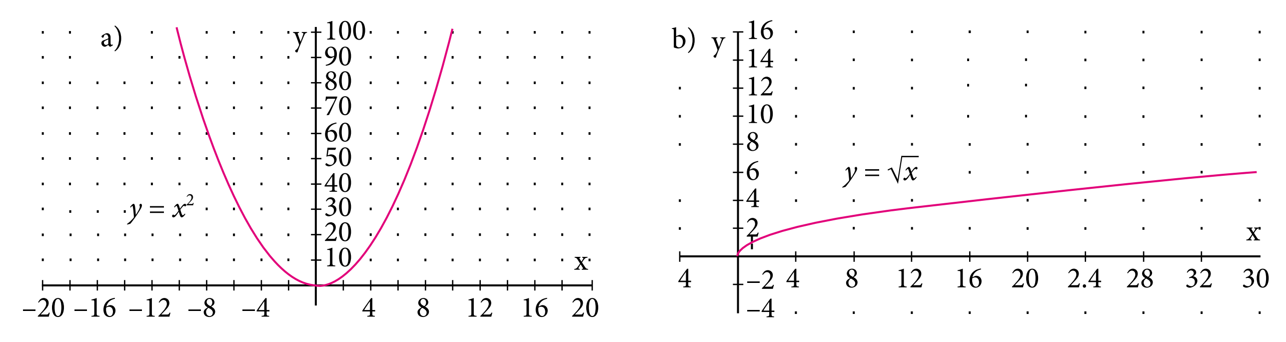



Figura 4.37

A continuación nos dedicaremos a buscar un procedimiento “rápido” que te permita representar funciones más complejas, y para ello vamos a aprovechar el ejemplo de la función $y=\frac{x^2-16}{x^2-7x+12}$ que ya también viste al inicio de la unidad de aprendizaje 1 y cuya gráfica también la conociste antes (Fig. 4.38) pero en ella no se percibían bien sus asíntotas ni el hecho de que en $x=4$ la gráfica tiene “un hueco” pues ella fue hecha usando la tecnología.

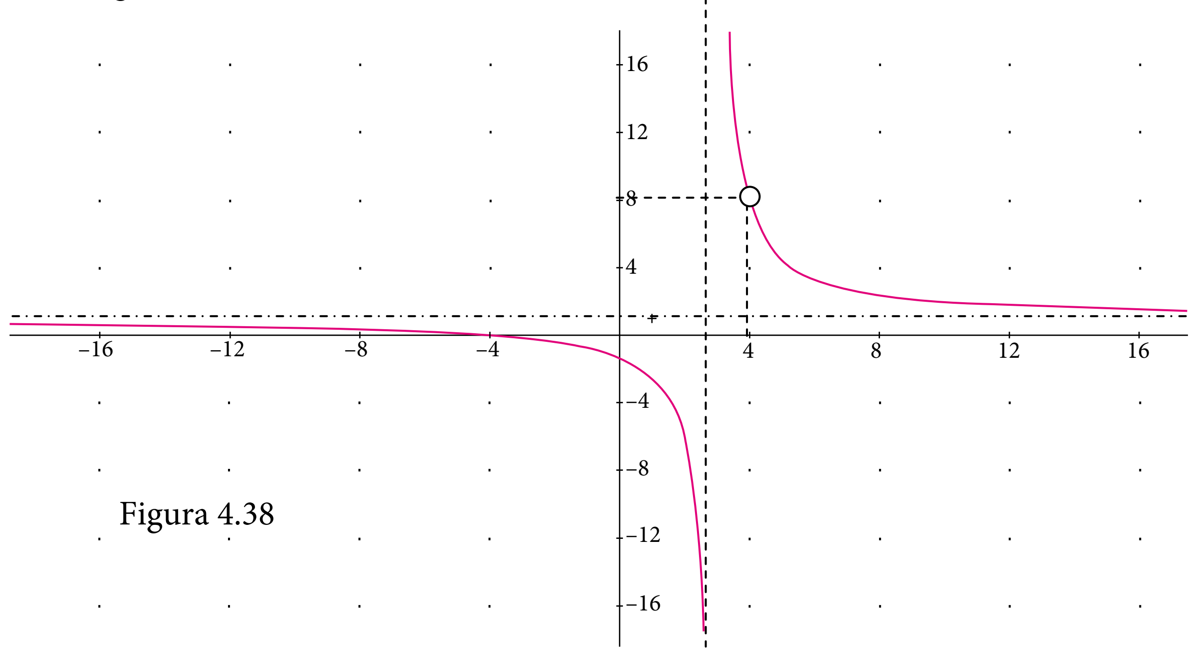


Figura 4.38

Hasta ahora un procedimiento que nos ha sido útil ha sido el de determinar los ceros de la función y determinar los intervalos donde la función cambia de signo. Vamos a seguir utilizando esta idea pero desde la función original.

En este caso se trata de una fracción racional por lo que no solo interesan los ceros sino también los polos (que son los ceros del denominador) que son puntos muy significativos ya que en ellos las funciones no están definidas.

Para encontrar los ceros y los polos hay que descomponer en factores numerador y denominador.

$$y=\frac{x^2-16}{x^2-7x+12}=\frac{(x+4)(x-4)}{(x-4)(x-3)}=\frac{x+4}{x-3}\ ;\ 4\notin Dom\,f$$

Para la representación es conveniente en este caso simplificar la fracción obtenida pero hay propiedades de la función original que se pierden cuando se hace eso, por ejemplo que en $x=4$ no está definida. No obstante para este procedimiento que queremos encontrar la fracción se simplifica pero se guarda en la “memoria” que en $x=4$ no está definida.

Observen que un cero es $x = -4$ y un polo es $x=3$. Ya sabemos que la gráfica corta al eje X en $x=4$ (4 es un cero) y que en 3 la gráfica se indefine, o sea tiende a $+\infty$ o a $-\infty$ en ese punto y eso para su gráfica significa que tiene una **asíntota vertical.**

Completemos esta idea buscando el signo de la función en los intervalos determinados por los ceros y los polos (Fig. 4.39a), tal como se hizo con los signos de la derivada y ya eso nos da mucha información sobre cómo va a ser la gráfica (Fig. 4.39b).

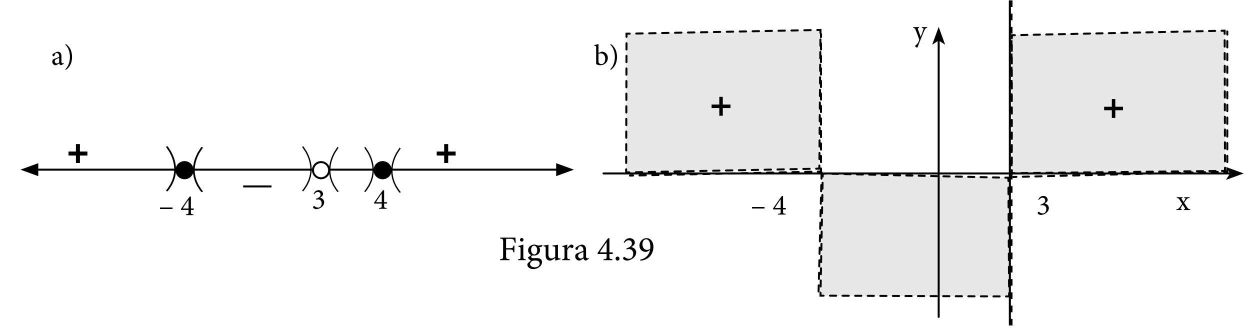



Figura 4.39

De esa primera información se tiene que la gráfica de la función está por encima del eje de las $x$ (la función es positiva) en el intervalo $(-\infty, -4)$, que en -4 corta al eje X, que en el intervalo $(-4, 3)$ la gráfica está por debajo del eje de las $x$ pues la función es negativa, y que en el intervalo $(3, +\infty)$ la gráfica está otra vez por encima del eje de las X pues la función vuelve a ser positiva y que en 3 tiene una asíntota vertical.

Se puede precisar también que la gráfica crece ilimitadamente por valores negativos cuando se acerca a 3 por la izquierda (tiende a -∞ cuando la $x$ se acerca por la izquierda a la asíntota $x = 3$) y crece ilimitadamente por valores positivos cuando se acerca a 3 por la derecha (tiende a +∞ cuando la $x$ se acerca por la derecha a la asíntota $x=3$).

Si se compara este resultado con la gráfica (Fig. 4.40) que ya conocemos verás que este comportamiento es exactamente el de la función, aunque nos faltan otros elementos para hacer la representación.

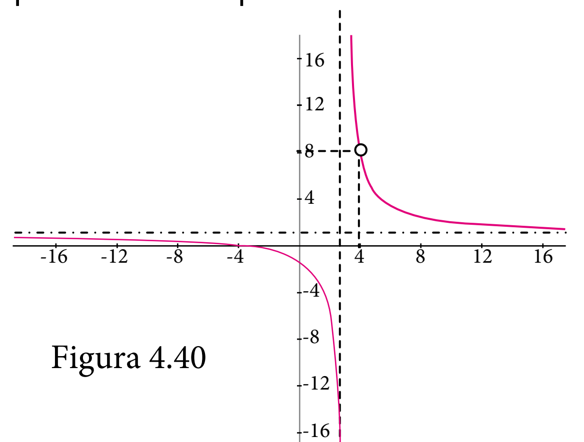



Figura 4.40

**Resumiendo lo hecho hasta aquí:**

- Se determinaron ceros y polos
- Se determinó el signo de la función en los intervalos determinados por los ceros y los polos.

De ahí se pudo saber en qué punto la función cortaba al eje X, en qué punto de indefinía, en qué intervalos la gráfica estaba por encima o por debajo del eje de las $x$ y hacia donde tendía cuando se acercaba a $x = 3$ por la izquierda y por la derecha.

Otra propiedad importante de las funciones y que tiene consecuencias también importantes para su representación, es su **límite en el infinito** pues si este es un número determina **asíntotas horizontales.** En este caso se tiene que:

Como $y=\dfrac{x^2-16}{x^2-7x+12}$, $y \to 1$ cuando $x \to \pm\infty$. Luego la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal. En este caso la gráfica se acerca por debajo de esa recta en el intervalo $(-\infty, 3)$ y por encima de esa recta en el intervalo $(3, +\infty)$.

Ya con lo que se tiene se puede hacer un esbozo aproximado de la curva (Fig. 4.41).

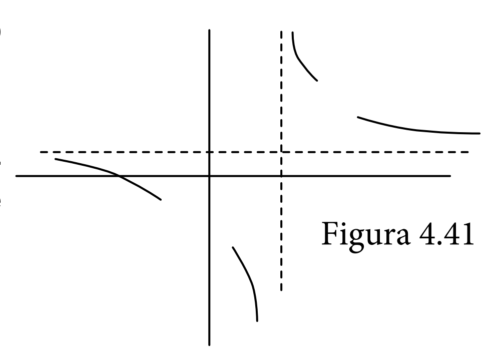


Figura 4.41

Solo faltaría precisar cómo es su crecimiento y su concavidad de donde se pueden tener también extremos locales y puntos de inflexión. Para ello hay que calcular la primera y segunda derivada de la función.

Puedes comprobar que estas son:

$$y' = \frac{-7(x-4)^2}{(x^2-7x+12)^2} \quad \text{y} \quad y'' = \frac{14}{(x-3)^3}$$

Como ven la primera derivada es siempre negativa pues los factores elevados al cuadrado, excepto en los ceros, son siempre positivos. Luego la función es decreciente en todo su dominio y por lo que no tiene extremos locales.

Por su parte la segunda derivada no tiene ceros pero en 3 cambia de signo de modo que para $x<3$ es negativa y para $x>3$ es positiva. Luego es cóncava hacia abajo en el intervalo (-∞, 3) y cóncava hacia arriba en el intervalo (3, -∞). Como cambia de concavidad en un punto que no está en el dominio de la función, tampoco tiene puntos de inflexión.

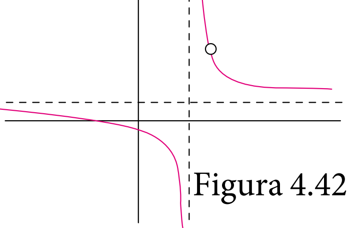


Figura 4.42

El esbozo concluido (Fig. 4.42) se aproxima bastante a la gráfica obtenida por el procesador pero **no debes olvidar que 4 no estaba en su dominio** luego la gráfica tiene un hueco en el punto (4 , 8).

El procedimiento siguiente lo debes aprender y aplicarlo de manera sistemática cuando vas a representar gráficamente una función.

**Procedimiento para representar la gráfica de una función**

**1. Determinar ceros y polos y el signo de la función en los intervalos determinados por ceros y polos para precisar:**

- Si hay puntos que no están en la gráfica.
- En qué punto la gráfica corta al eje X.
- En qué intervalos la gráfica está por encima o por debajo del eje X.
- Si tiene asíntotas verticales.
- Cómo se acerca la gráfica a las asíntotas verticales.

**2. Calcular el límite de la función en el infinito para precisar:**

- Si hay asíntotas horizontales.
- Unido al conocimiento del signo de la función y las asíntotas verticales se precisa cómo se acerca la gráfica a dicha asíntota cuándo la función tiende a más infinito y a menos infinito.

**3. Calcular la primera derivada y determinar sus ceros y el signo en los intervalos determinados por los ceros para precisar:**

- En qué intervalo la gráfica crece o decrece.
- Los puntos donde hay máximos o mínimos locales, si existen, y evaluando la función en dichos puntos se hallan los puntos de la gráfica donde están dichos extremos.

**4. Calcular la segunda derivada y determinar sus ceros y el signo en los intervalos determinados por los ceros para precisar:**

- En qué intervalo la gráfica abre hacia arriba o abre hacia abajo.
- Los puntos de inflexión si existen.

**Ejemplo 23:** Representa gráficamente la función $y = 2x^3-8x^2+8x$.

**Resolución:** En la solución de los ejemplos se va a seguir paso a paso el procedimiento y se va a ir representando por partes la función y va a quedar constancia de cada parte por separado. En la práctica cada esbozo parcial va a ser completado con lo nuevo que se tiene, por lo que se debe ir trabajando siempre sobre una misma representación.

**1ro. Determinar ceros y polos y el signo de la función en los intervalos determinados por ceros y polos.**

Esta función no tiene polos luego solo se determinarán los ceros. Al no tener polos tampoco tiene asíntotas verticales y su dominio es $\Re$.

Descomponiendo en factores $2x^3- 8x^2 + 8x = 2x\,(x^2-4x+4)= 2x(x-2)^2$ se tiene que los ceros son $x=0$ y $x=2$, y este último cero es un **cero doble.**

Para determinar los signos se evalúa la función en un valor comprendido en cada intervalo y se tiene que en $(-\infty, 0)$ es negativo pero en los dos restantes va a ser positivo debido al cero doble.

La gráfica entonces corta al eje $x$ en $0$ y en $2$. En el intervalo $[0, 2]$ no existe otra posibilidad de que la curva se comporte como lo representado en la fig.4.43b) pues tiene dos ceros seguidos y es positiva en ese intervalo, luego hay un máximo local aunque no se sabe qué valor tiene ni en qué punto lo alcanza.

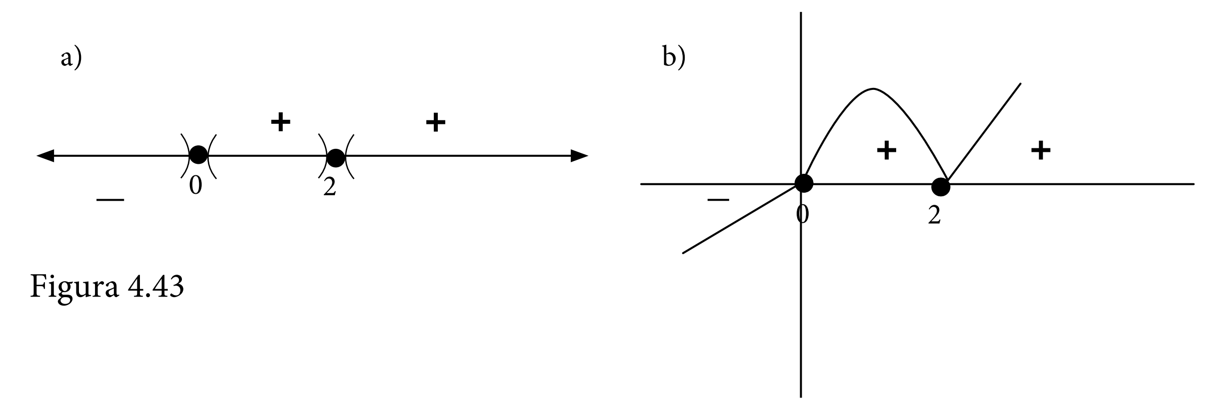



Figura 4.43

**2do. Calcular el límite de la función en el infinito.**

Calculando los límites en el infinito se tiene que:

$$\lim_{x\to-\infty} (2x^3 - 8x^2 + 8x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} (2x^3 - 8x^2 + 8x) = +\infty$$

resultado que confirma que la gráfica debe comportarse como la propuesta anterior.

**3ro. Calcular la primera derivada y determinar sus ceros y el signo en los intervalos determinados por los ceros.**

El gráfico anterior nos da esa respuesta en parte, pero tenemos que confirmar y ganar precisión. Derivando se tiene:

$$y' = 6x^2 - 16x + 8 = 2(3x^2 - 8x + 4) = 2(3x - 2)(x - 2)$$

Los ceros son $\frac{2}{3}$ y 2. Determinando los signos en los intervalos como ya sabemos se tiene:

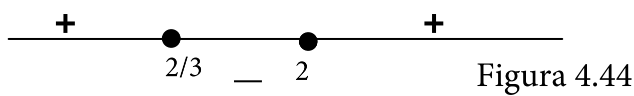


Figura 4.44

Con esto se confirma que en 2/3 hay un **máximo local** pues la derivada pasa de positiva a negativa en ese punto.

Para calcular el valor máximo basta evaluar a la función en $x = 2/3$:

$$y_{\max} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 8\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 8\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{27} - \frac{32}{9} + \frac{16}{3} = \frac{16\text{-}96\text{+}144}{32} = \frac{64}{27} \approx 2.37$$

Para calcular el valor mínimo se evalua la función en $x = 2$

$$y_{\text{mín}} = 2(2)^3 - 8(2)^2 + 8(2) = 0$$

La próxima versión de la gráfica es entonces la de la fig. 4.45.

Ahora solo falta determinar la concavidad de la curva sobre todo en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(2, +\infty)$.

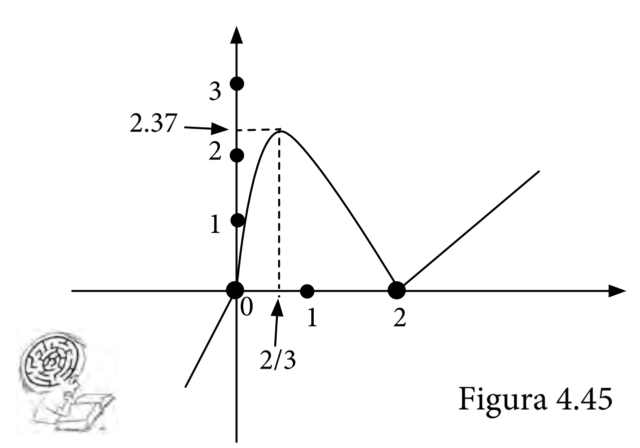


Figura 4.45

**4to. Calcular la segunda derivada y determinar sus ceros y el signo en los intervalos determinados por los ceros**

Calculando la segunda derivada se tiene $y'' = 12x - 16 = 4(3x - 4)$ que tiene un único cero en $x = 4/3$. Sus signos se comportan como se muestra en la figura 4.46.

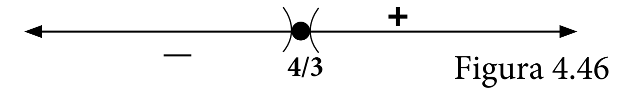


Figura 4.46

Lo obtenido significa que la función es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-\infty, 4/3)$ que es donde es negativa la segunda derivada y cóncava hacia arriba en el intervalo $(4/3, \infty)$ que es donde es positiva la segunda derivada.

Hay un **punto de inflexión** en el punto de abscisa 4/3 que es donde la gráfica pasa de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba.

Para completar el gráfico hay que determinar el valor de la función en 4/3 para saber exactamente cuál es el punto de inflexión. Evaluando la función se tiene:

$$y_{\text{inf}} = 2\left(\frac{4}{3}\right)^3 - 8\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 8\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$= \frac{128}{27} - \frac{128}{9} + \frac{32}{3}$$

$$\approx 4.74 - 14.2 - 10.7$$

$$\approx 1.24$$

Volviendo a arreglar el esbozo con la nueva información se completa la representación que de manera aproximada aparece en la figura 4.47.

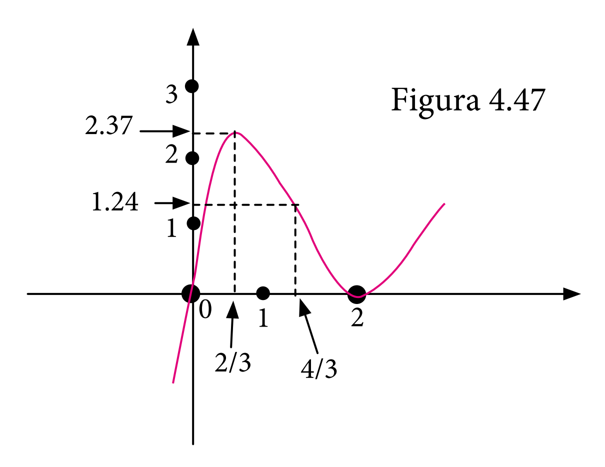



Figura 4.47

**Ejemplo 24:** Representa gráficamente la función $y=x^2e^x$.

**Resolución:** Para hacer la representación volveremos a usar el anterior procedimiento tratando de abreviar un poco. Vamos a buscar primero todo lo relativo a la función, después a lo de su primera derivada y por último a lo de su segunda derivada. Con respecto a la **función** se tiene que:

- $y = x^2 e^x$ está definida en todo $\Re$ pero es mayor o igual a 0 en todo su dominio pues $x^2$ es siempre igual o mayor que 0 y $e^x$ siempre es mayor que 0. La gráfica entonces tiene **un solo cero en $x$=0,** que es un cero doble, y **está toda contenida sobre el eje $x$.**
- Como $x^2$ y $e^x$ crecen ilimitadamente a la derecha su producto tiende a $+\infty$, sin embargo a la izquierda no sabemos qué pasa pues $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ **pero no sabemos qué pasa** con el producto $x^2e^x$.

Busquemos más información sobre **la primera derivada** para ver si podemos intuir algo sobre el comportamiento en $-\infty$.

- $y' = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x(2x + x^2)$

El signo está determinado por el del factor $2x + x^2 = x(2 + x)$. En este caso hay dos ceros, uno en $x$=0 y otro en $x$=$-2$. Los signos se comportan como se indica en la figura 4.48.

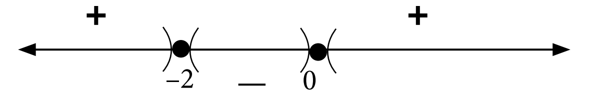



Figura 4.48

Lo que significa que la función tiene un máximo local en $x=-2$ pues la derivada pasa de positiva a negativa en ese punto, que es creciente en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(0, +\infty)$ y decreciente en el intervalo $(-2, 0)$.

El comportamiento de la gráfica tiene que ser como el de la figura 4.49 luego parece ser que $\lim_{x\to-\infty} x^2e^x = 0$, o sea que en el producto domina $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

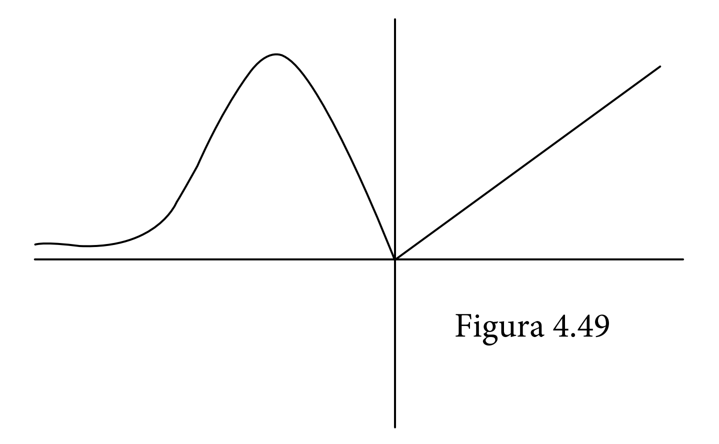


Figura 4.49

Por supuesto que podemos precisar mejor esa gráfica pues se puede saber cuál es ese valor máximo evaluando la función en $x=-2$.

En $x=-2$, la función $y=x^2e^x = (-2)^2 e^{-2} \approx 4\left(\frac{1}{2.71^2}\right) = \frac{4}{7.34} \approx 0.45$. Una versión más aproximada es la siguiente (Fig. 4.50):

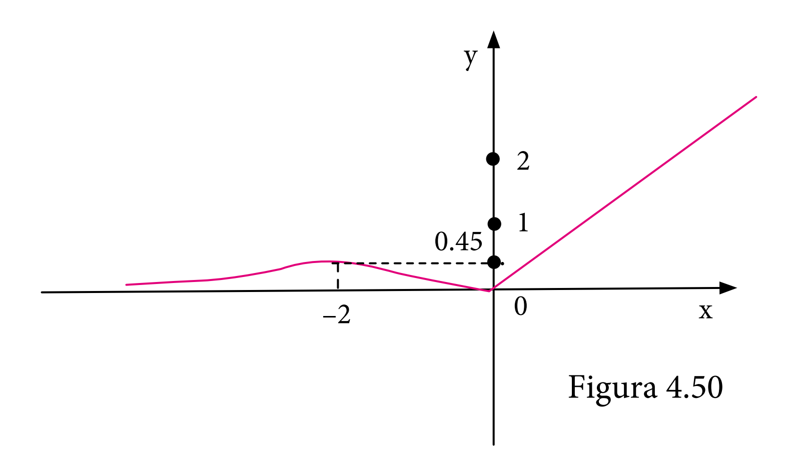



Figura 4.50

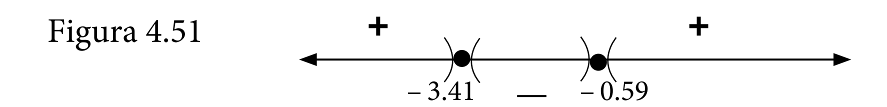
Ahora solo falta buscar más información sobre la **segunda derivada** para ver mejor la concavidad de la función y dónde están sus puntos de inflexión.

- $y'' = (e^x(2x + x^2))' = e^x(2x + x^2) + e^x(2 + 2x) = e^x(2x + x^2 + 2 + 2x) = e^x(x^2 + 4x + 2)$

Los ceros de la segunda derivada son las soluciones de la ecuación cuadrática $x^2+4x+2=0$ y estos son $x_{1,2}=-2\pm\sqrt{2}$. Buscando soluciones aproximadas se tiene que $x_1=-2+\sqrt{2} \approx -2+1.41 = -0.59$ y $x^2 = -2 -\sqrt{2} \approx -2-1.41=-3.41$

Analizando los signos por intervalos se tiene:

Figura 4.51



Como se puede apreciar la función tiene **dos puntos de inflexión** en los ceros de la segunda derivada y en el **primer intervalo es cóncava hacia arriba, en el segundo cóncava hacia abajo** y **en el tercero de nuevo cóncava hacia arriba,** tal como se muestra en la figura 4.52.

Ademas, como puedes comprobar, en $x=-2$ tiene un valor máximo $y=0.45$ y en $x=0$ un valor mínimo $y=0$.

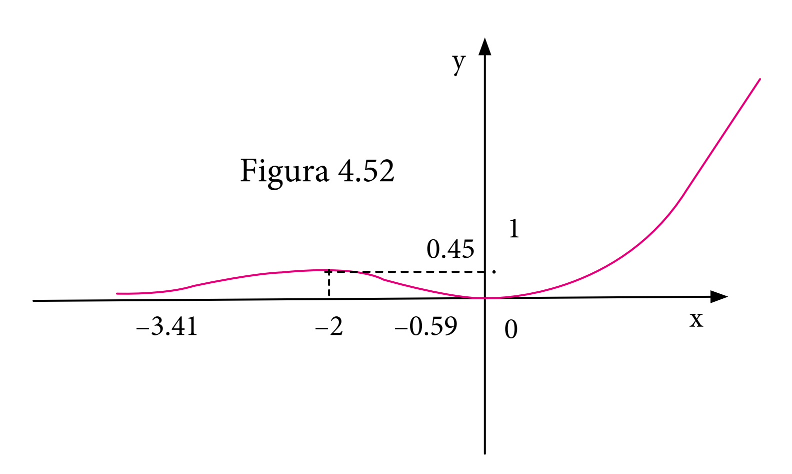


Figura 4.52

**Ejemplo 25:** Representa gráficamente la función $y=2 \text{ sen } 2x+1,\ 0 \le x \le \pi$.

**Resolución:** En este ejemplo se puede proceder de manera más breve pues se trata de una función conocida y si se representa primero $y_1 = 2 \text{ sen } 2x$, que ya sabes cómo hacerlo de lo que aprendiste sobre funciones, después todo lo que hay que hacer es trasladar el gráfico una unidad hacia arriba que es lo que significa sumar 1 a una función cualquiera.

El dominio es de $0$ a $\pi$ pero su gráfico es el de esa función en el intervalo fundamental pues su período se divide por $2$. Por otra parte la imagen va de $-2$ a $2$ porque el factor $2$que multiplica a la función representa una dilatación en el eje de las y.

$y_1 = 2\text{sen}2x$ tiene ceros donde se anula $\text{sen}2x$. Como de $0$ a $2\pi$ el seno tiene tres ceros que son $0,\pi$ y $2\pi$, en el intervalo dado los ceros son $0,\frac{\pi}{2}$ pues en $2(\frac{\pi}{2})=\pi$ y en $\pi$, $\text{sen}2\pi=0$. Los signos son como los de la función seno en su intervalo fundamental.

El gráfico es como el de la figura 4.53.

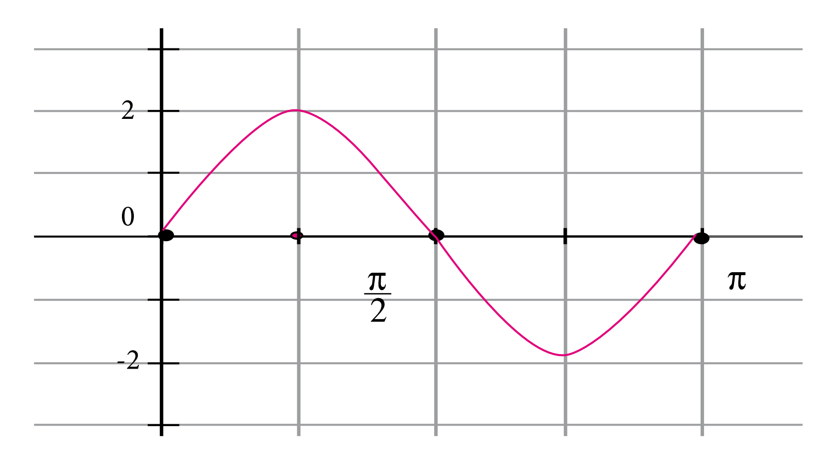


Figura 4.53

Ahora solo queda trasladar la gráfica de la función una unidad hacia arriba. (Fig.4.54)

La imagen de la función $y=2\ \text{sen}\ 2x+1$, en $0 \leq x \leq \pi$ es $[1, 3]$, y sus ceros son las soluciones de la ecuación

$2\text{sen}2x+1=0$ o $\text{sen}\ 2x = -\frac{1}{2}$

Esas raíces son:

$x_1 = \frac{7\pi}{12}$ ó $x_2 = \frac{11\pi}{12}$ que son los ceros de la función dada en ese intervalo y que son aproximadamente $105^0$ y $165^0$.

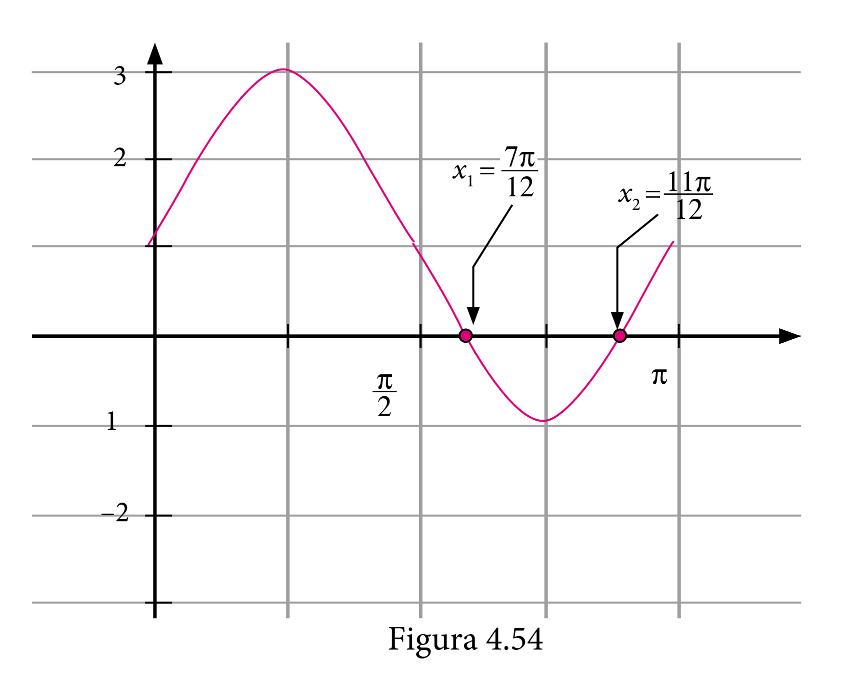
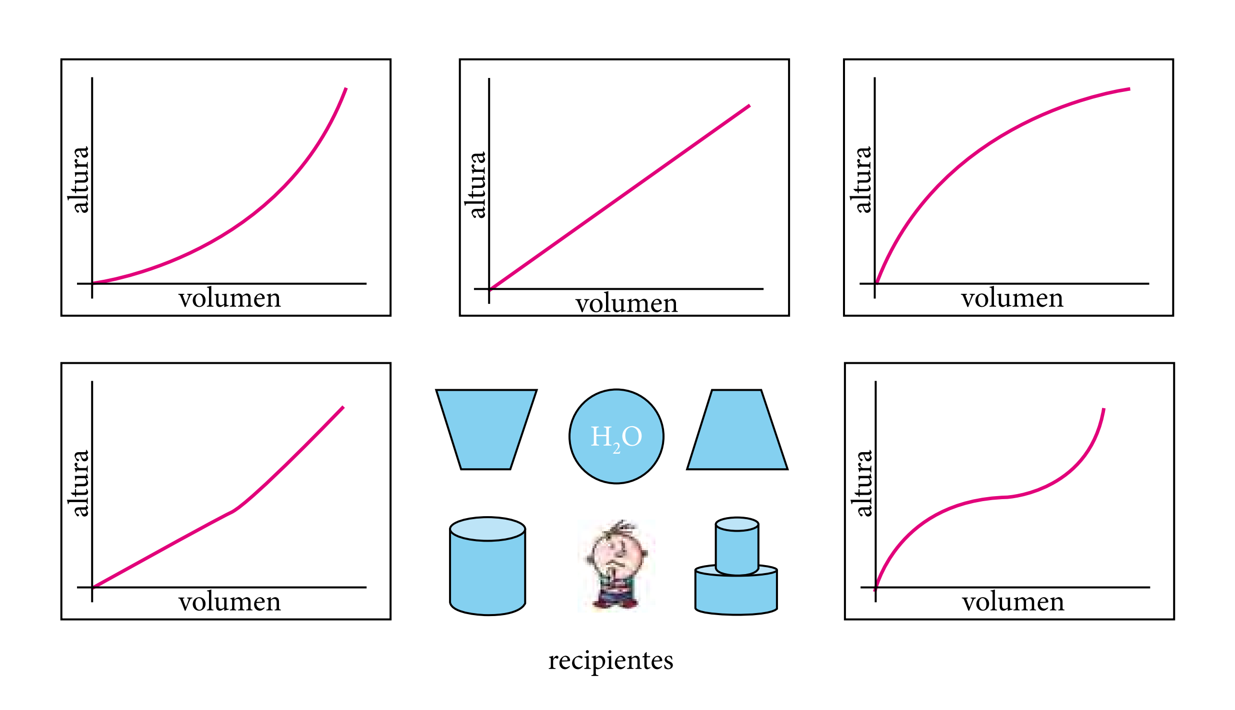



Figura 4.54

***ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE:***



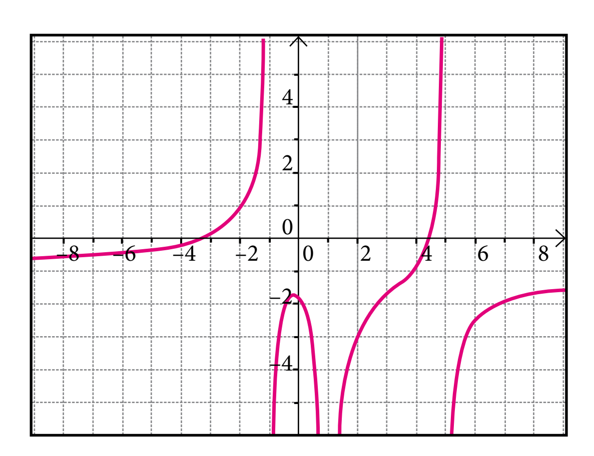
**Act-42)** Cada una de las siguientes gráficas representa el llenado de agua de un tipo de recipiente, selecciona la forma del recipiente correspondiente a cada gráfica.

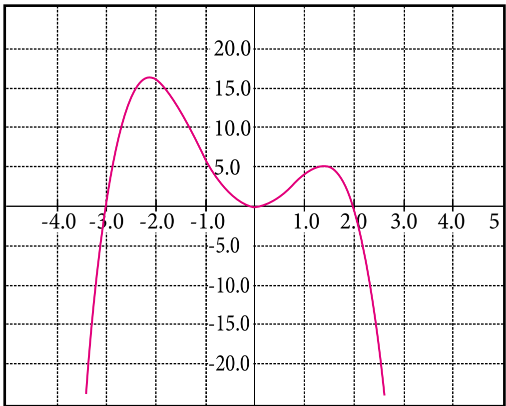



recipientes

**Act-43)** Analice y determine para cada una de las gráficas de abajo lo siguiente:

a) Los intervalos de monotonía (creciente y decreciente)
b) Los ceros y polos. Las asíntotas.
c) Los valores de los máximos y mínimos relativos
d) Los intervalos y tipos de concavidad, y los puntos de inflexión.




**Act-44)** Utiliza el procedimiento descrito en este epígrafe para hacer el gráfico de la función.

a) $y=x^3-3x^2$

b) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

c) $y = 2x^3 + 7x$

d) $f(x) = 3 + 2x - x^2$

e) $y = \dfrac{x}{x^2 + 4}$

f) $y = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{2x}$

g) $y = \dfrac{x^2 - 1}{(x-2)^2}$

h) $y = x^2 + \dfrac{250}{x}$

i) $y = x^3 + \dfrac{48}{x}$

i) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 4}$

k) $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

l) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 8$

m) $f(x) = (2 - x)^3$

n) $y = (x^2 - 4)^2$

ñ) $y = \dfrac{1}{6}(3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 5)$

o) $f(x) = x(12 - 2x)^2$

**Act-45)** Representa gráficamente las siguientes curvas, y verifícalas trazando el gráfico en un procesador.

a) $y = 3\,\text{sen}^2 x$

b) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$

c) $y = e^x(1 - x^2)$

d) $y = (x - 3)\sqrt{x^2}$

e) $y = x\,e^x$

f) $y = \dfrac{\text{sen}^2 x - \cos^2 x}{2}$

g) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4 - x}$

h) $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^2}$

i) $f(x) = e^{\text{sen} x}$

j) $f(x) = \text{sen}\, x + \dfrac{1}{2}\text{sen}\, 2x$

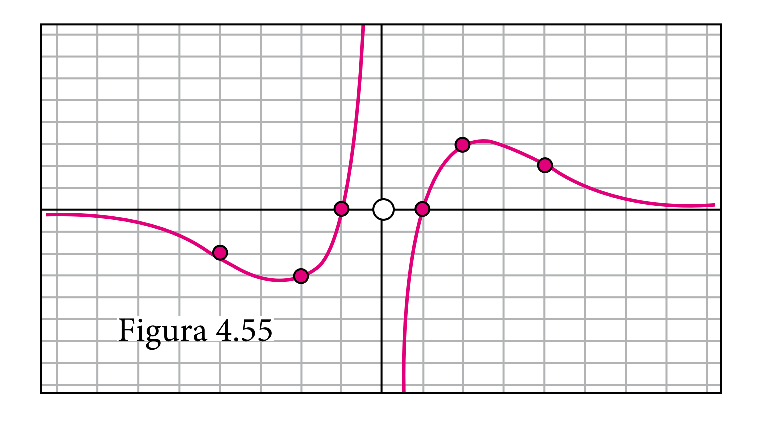
k) $f(x) = (\text{sen}\, x + \cos x)^{-1}$

l) $f(x) = \sqrt{8 + x} - \sqrt{8 - x}$

m) $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$ n) $f(x) = e^{\cos x}$ ñ) $f(x) = \cos x - ln \cos x$

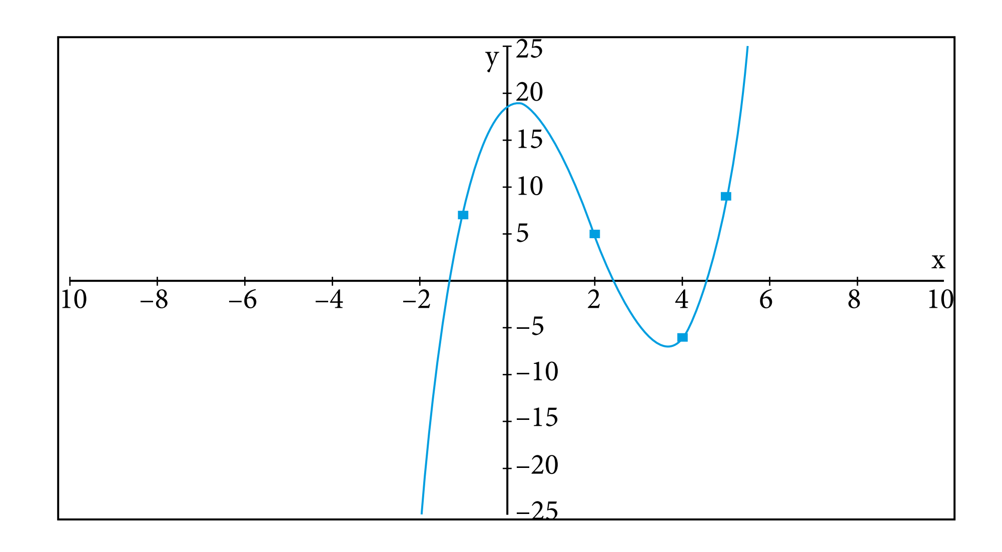
o) $f(x) = 2x - \tan x$ p) $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x}$ q) $f(x) = x^2\, ln\, x$

**Act-46)** Encuentra o construye una función cuya representación gráfica sea como la de la figura 4.55. Y verifícala trazando después el gráfico en un procesador.


Figura 4.55

**Act-47)** Analice y determine para la siguiente gráfica lo siguiente:

e) Los intervalos de monotonía (creciente y decreciente)
f) Los ceros y polos. Las asíntotas. Simetrias.
g) Los valores de los máximos y mínimos relativos
h) Los intervalos y tipos de concavidad, y los puntos de inflexión.
i) Sabiendo que la gráfica corresponde a la función polinomial de tercer grado $y = p(x)$, y que $p(-1) = 7$, $p(2) = 5$, $p(4) = 6$ y $p(5) = 9$ son valores de la función, determine la función. Y después verifícala con un procesador.



## 4.5. Aplicación de las funciones y la derivada a la modelación y resolución de problemas de optimización (de la ingeniería, la economía, la administración, el comercio y otros)

En la práctica surgen muchos problemas de diferente naturaleza que pueden ser resueltos aplicando el cálculo diferencial y en este epígrafe aprenderás a resolverlos. Pero antes es conveniente conocer los siguientes seis subprocesos heurísticos de un proceso de ***modelización matemática:***

(a) **Formulación del problema:** Poner de manera clara y explícita la formulación de una tarea (o actividad de aprendizaje) identificando las características de una realidad percibida como problemática y que será modelada o matematizada.

(b) **Sistematización:** selección de los objetos relevantes, relaciones, etc. Del dominio de investigación resultante e idealización de las mismas para hacer posible una representación matemática.

(c) **Traducción** de esos objetos y relaciones al lenguaje matemático.

(d) **Uso de métodos y modelos matemáticos** para arribar a resultados matemáticos o cuantitativos.

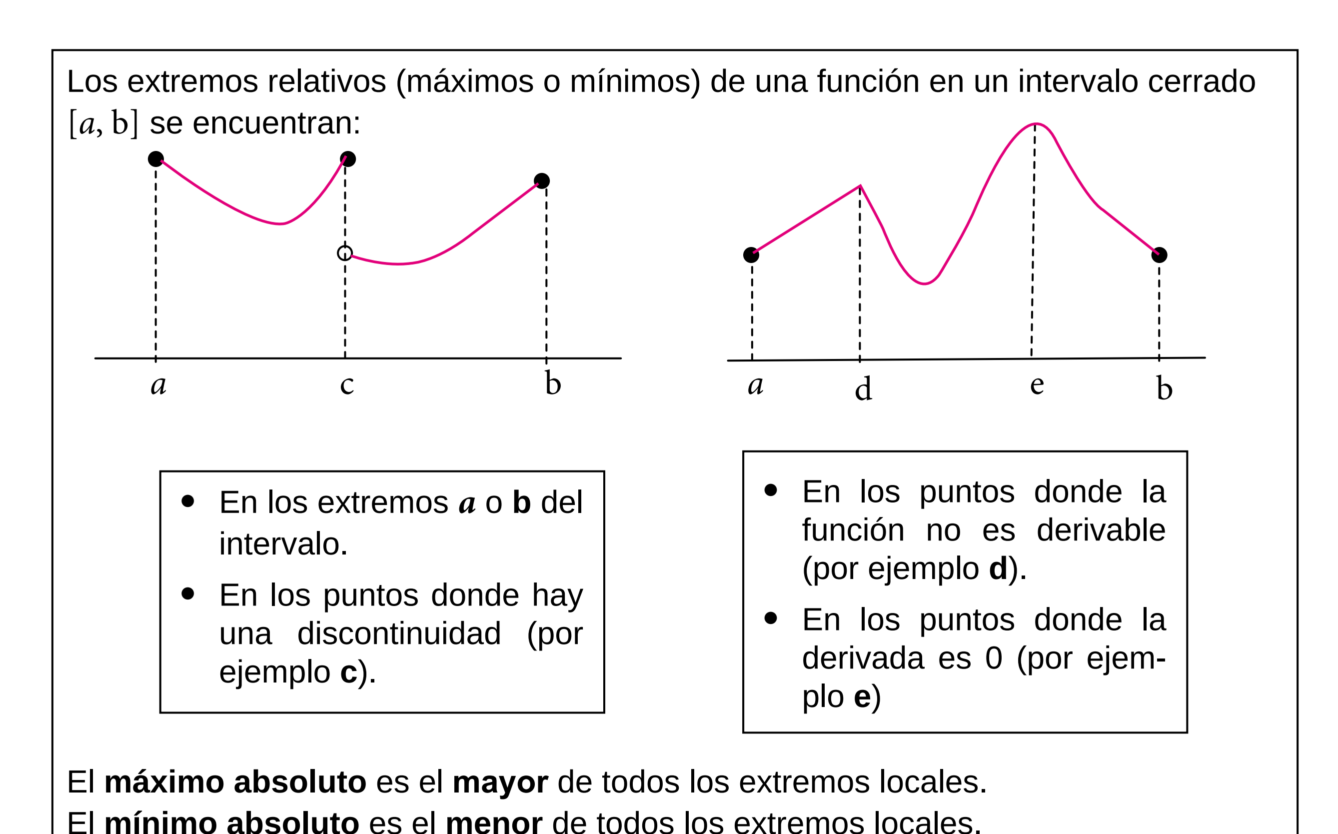
(e) **Interpretación de los resultados** y conclusiones cuantitativas y cualitativas considerando el dominio y las condiciones de la investigación inicial.

(f) **Evaluación de la validez del modelo y los resultados** por comparación con datos (observados o predichos) y/o con el conocimiento teórico o por experiencia personal o compartida.

### *Problemas de optimización o sobre valores extremos de una función*

Dentro de estos problemas que se presentan en la práctica están aquellos en los que se trata de **optimizar una función,** o sea buscar cómo maximizar o minimizar determinado resultados o variables, por ejemplo encontrar cómo hacer algo que cueste lo menos posible, o que tenga el mayor volumen posible, entre otras posibilidades. A este tipo de situaciones se les denomina **problemas de optimización** o simplemente **problemas sobre valores extremos.** Muchos de estos problemas prácticos de optimización pueden ser resueltos aplicando el cálculo diferencial y en este epígrafe aprenderás a resolverlos.

En la solución de problemas de optimización se buscan **valores extremos globales (o locales).** Por ello debes recordar que:




**Ejemplo 26:** Descompón el número 24 en dos sumandos positivos tales que el producto del primer sumando por el cuadrado del segundo sea máximo.

**Resolución:** En este tipo de problema se busca un extremo (máximo o mínimo) **que sea global,** es decir que sea el mayor (menor) de todos los posibles en el dominio de la función de que se trate.

Como se te recordó en el cuadro anterior entonces es muy importante que la **función a maximizar (o minimizar) se le precise el intervalo de valores que dicha función puede tomar, o sea su dominio y también en los puntos de discontinuidad (si tiene) o donde no es derivable.**

La importancia de determinar los anteriores puntos es que no solo hay posibles extremos locales donde se anula la primera derivada. Por ello no basta encontrar un máximo (mínimo) local en el interior del intervalo, hay que compararlo con los valores que toma la función en todos sus valores extremos.

Por otra parte, en este tipo de problema siempre hay, además de una función que se desea optimizar y a la que se le acostumbra a llamar **función objetivo,** otras relaciones que establecen condiciones para la función objetivo y que se le llama **función o relación de enlace** que por lo general hay que "introducirla" en la función objetivo.

**Condiciones dadas**

Primer número: $x$

Segundo número: $y = 24 - x$ (relación de enlace)

**Función objetivo**

La función a maximizar es $f(x) = xy^2 = x(24 - x)^2$ con $0 < x < 24$ que no tiene puntos de discontinuidad en ese intervalo y es derivable en todo su dominio. El único problema que tenemos es que en los extremos del intervalo $(0, 24)$ pueden haber también extremos.

**Derivando la función $f$ se tiene que:**

$f'(x) = (24 - x)^2 + 2x(24 - x)(-1) = (24 - x)^2 - 2x(24 - x) = (24 - x)(24 - 3x)$

Los posibles extremos son $x = 24$ y $x = 8$, pero $x=24$ no está en el dominio, luego $x=8$ es un punto de extremo local y es máximo porque en él la derivada cambia de positiva a negativa (la función pasa de creciente a decreciente).

+ $f'(x)<0$ +

$f'(x)>0$ **8** − **24** $f'(x)>0$

Figura 4.56

La función $f(x)=x(24-x)^2$ con $0 < x < 24$ evaluada en $x = 8$ es igual a $f(8)=8(24-8)^2=2\,048$ y ese es un máximo relativo de dicha función que lo alcanza en $x=8$.

Falta ahora evaluar la función en los extremos del intervalo que son 0 y 24 y comparar los valores extremos obtenidos con 2 048.

$f(0) = 0(24 - 8)^2 = 0 < 2\,048$ y $f(24) = 24(24 - 24)^2 = 0 < 2\,048$

Luego en $x = 8$ la función tiene un máximo global. Volviendo a las condiciones iniciales tenemos que $x = 8$ y $y = 24 - 8 = 16$. **Respuesta:** El 24 se descompone en los suma dos 8 y 16 y el máximo del producto del primer sumando por el cuadrado del segundo es $f(8) = 2\,048$.

**Ejemplo 27:** De todos los rectángulos de perímetro 20 cuál es el de mayor área.

**Resolución:** Habría que analizar de todos los rectángulos posibles con un perímetro de 20 que es lo mismo que un semiperímetro de 10.

Las condiciones son que **si un lado es $x$, el ancho es $10-x$. (relación de enlace).** La función **que se va a optimizar**, o sea la **función objetivo** es el área del rectángulo con

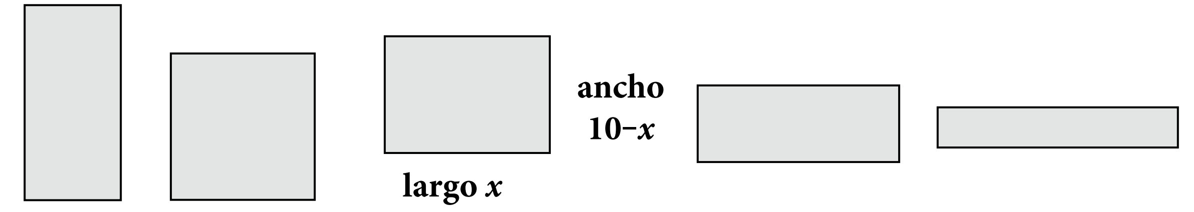



Figura 4.57

las condiciones antes establecidas para sus lados. Como el área del rectángulo es largo por ancho, entonces la función a optimizar (función objetivo) es $f(x)= x(10-x)$ con $0 < x < 10$ que es derivable y continua en todo ese intervalo.

Para buscar el máximo relativo ya sabes cómo hacerlo derivando la función. Después se evalúa la función en los extremos del intervalo que es su dominio y se comparan los valores obtenidos con el del máximo local antes encontrado. **El mayor de ellos es el máximo global.**

En este caso $f'(x) = 10 - 2x$ tiene un único cero que es $x$=5, que es un punto de máximo local pues en 5 la derivada pasa de valores positivos a valores negativos, o sea la función pasa de ser creciente a decreciente (Fig. 4.58).

+ $f'(x)<0$
$f'(x)>0$ 5 –

Figura 4.58

Evaluando la función en el punto de máximo local antes hallado se tiene que:

$$f(5) = 5(10 - 5) = 5 \times 5 = 25$$

Evaluando la función en los extremos del intervalo $0 < x < 10$ se tiene:

$$f(0) = 0(10 - 0) = 0 < 25 \text{ y } f(10) = 10(10 - 10) = 0 < 25$$

Comparando los tres valores encontrados se puede concluir que en $x$=5 la función tiene un máximo global y ese máximo es 25.

Los lados del rectángulo que satisface esas condiciones son $x$=5 y $y$=10–5=5, luego **el área máxima se alcanza cuando el rectángulo es un cuadrado**.

**Respuesta:** El rectángulo de mayor área con un perímetro de 20 es el cuadrado de lado 5.

**Ejemplo 28:** Se necesita una superficie rectangular cercada por tres de sus lados con tela metálica y por el cuarto lado con un muro de piedra. Se dispone de 20 metros lineales de tela metálica. Calcula las dimensiones que ha de tener la superficie para que su área sea lo mayor posible.

**Resolución:** Este es un problema práctico similar al anterior, con la misma función objetivo que es el área de un rectángulo, pero con la diferencia de que la función de enlace no es el perímetro completo porque hay un lado que no lleva cerca.

En la figura 4.59 aparece representada la superficie.




Figura 4.59

La **función de enlace** en este caso tiene como ecuación $x + y + x = 2x + y = 20$ donde 20 son los metros de tela metálica que se dispone. En esta ecuación despejando se tiene que $y = 20 - 2x$ (función de enlace con la función objetivo).

La **función objetivo** es el área $A(x) = xy = x(20 - 2x) = 20x - 2x^2$ con $0 < x < 10$ que es derivable y continua en ese intervalo.

Hallemos el máximo de la función A: $A'(x) = 20 - 4x$ , de donde un posible extremo está en $x = 5$.

Utilizando el procedimiento de la segunda derivada para determinar si es un máximo se tiene $A''(x) = -4 < 0$ para todo $x$, por lo que en $x = 5$ hay un máximo relativo. Este máximo es global pues es el único 0 en el dominio de la función y en los extremos del dominio la función vale 0. Luego el máximo es absoluto y el valor de la función en dicho punto es $A(5) = (20 \times 5) - \left(2 \times (5)^2\right) = 50$.

El otro lado igual al cercado por el muro es $y = 20 - 2x = 20 - (2 \times 5) = 10$.

Observen que el área máxima de 50 m$^2$ se puede lograr con esos 20 metros de cerca si los lados se toman convenientemente. **Respuesta:** Por tanto, el lado cercado por el muro debe medir 10 m y el otro lado 5 m para lograr el área máxima.

**Ejemplo 29:** ¿Qué relación debe haber entre el radio y la altura de un cilindro circular recto de volumen dado $v$ para que su área total sea la menor posible?

**Resolución:** Hagamos primero una **figura de análisis** (Fig. 4.50). En este caso se ha desarrollado el cilindro pues en la información que dan se quiere maximizar precisamente su área total, y esta es la suma del área de los dos círculos bases $(2\pi r^2)$ con el área del rectángulo que resulta de “estirar” la parte lateral del cilindro que tiene como base $2\pi r$ y como altura la misma altura $h$ del cilindro $(A_L = 2\pi rh)$.

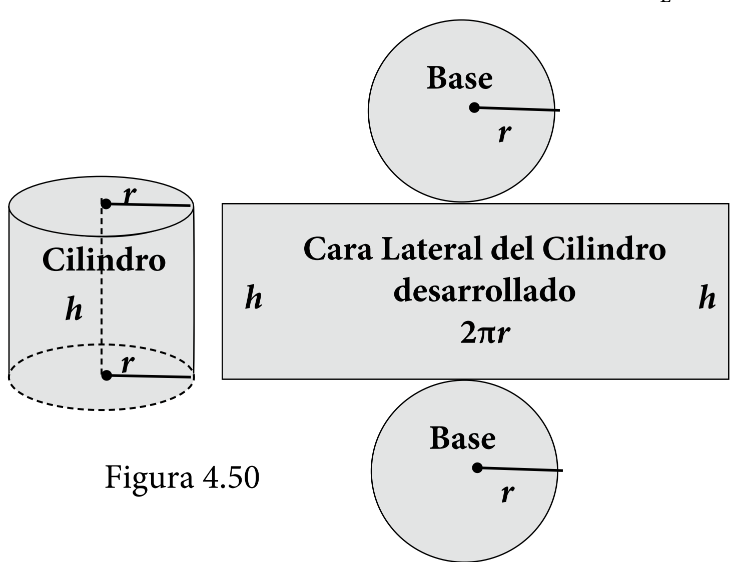



Figura 4.50

La función objetivo es entonces el área total del cilindro que es dos veces el área del círculo de la base más el área lateral del cilindro.

O sea es: $A_T = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, siendo $r$ el radio de la base y $h$ la altura del cilindro.

Las condiciones que se dan es que el volumen del cilindro es un valor fijo $v$, o sea: $v = \pi r^2 h$ y hay que despejar $h$ para expresar esa relación en función del radio $r$. Luego $h = \dfrac{v}{\pi r^2}$ que va a servir como **función de enlace** con la función objetivo.

$A_T = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ , y sustituyendo $h$ se obtiene la función objetivo:

$$A_T(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\frac{v}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + 2\frac{v}{r} = 2(\pi r^2 + \frac{v}{r}) \text{ con } r > 0$$

que también es una función derivable y continua en ese intervalo.

Derivando la función objetivo e igualando a cero:

$A_T'(r) = (2\pi r^2 + 2\frac{v}{r})' = 4\pi r + 2\frac{-v}{r^2} = 2(2\pi r - \frac{v}{r^2})=0$

La derivada se anula cuando $2(2\pi r - \frac{v}{r^2}) = 0$, o sea cuando:

$2\pi r = \frac{v}{r^2} \quad \Rightarrow \quad r^3 = \frac{v}{2\pi}$ o sea que $r = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$.

Usando el criterio de la segunda derivada se tiene que:

$A_T''(r) = (4\pi r - 2\frac{v}{r^2})' = 4\pi + \frac{4v}{r^3}$

Luego $A_T''\left(\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}\right) = 4\pi + \frac{4v}{\frac{v}{2\pi}} = 4\pi + 4\cdot 2\pi = 12\pi > 0$

Y por tanto en $\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$ la función tiene un mínimo local.

Como la función $A_T(r) = 2(\pi r^2 + \frac{v}{r})$ con $r > 0$ crece ilimitadamente a la derecha, y a la izquierda sucede lo mismo con $A_T(r) \xrightarrow[r\to 0]{} +\infty$ porque ambos sumandos crecen ilimitadamente. Se concluye que en $r = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$ hay un **mínimo absoluto.**

Entonces: $\frac{h}{r} = \frac{\frac{v}{\pi r^2}}{r} = \frac{v}{\pi r^3} = \frac{v}{\pi \frac{v}{2\pi}} = 2 \Rightarrow h = 2r$

**Respuesta:** La altura del cilindro debe ser el doble del radio de la base para que el área total sea la menor posible.

El siguiente procedimiento para optimizar una función debes aprenderlo y usarlo correctamente.

| **Procedimiento para resolver problemas de optimización, o sea de hallar máximos o mínimos globales de una función.** | |
|---|---|
| Primero | Hacer una figura de análisis si lo consideras necesario. |
| Segundo | Identificar la función que hay que optimizar (función objetivo) y las condiciones que dan para hacerlo (funciones de enlace). |
| Tercero | Expresar la función objetivo en términos de una sola variable sustituyendo en su ecuación la relación de enlace y precisar el dominio de definición de esa función. |
| Cuarto | Determinar los puntos de máximo (mínimo) local de la función objetivo y evaluar la función en dicho punto para conocer cuál es su valor máximo (mínimo). |
| Quinto | Determinar los valores de la función en los extremos del intervalo donde está definida y comparar ese valor con el valor máximo (mínimo) antes hallado. |
| Sexto | Concluir cuál es el punto de máximo (mínimo) global y darle respuesta a la pregunta del problema. |

Ya aplicada e interiorizada la metodología anterior a partir de los ejemplos resueltos hasta aquí, en los ejemplos que siguen seremos un poco más directos en el proceso de su resolución, además, ampliaremos los campos de aplicación de las funciones y la derivada a otras áreas del conocimiento, la ciencia y la ingeniería.

**Ejemplo 30:** En una fábrica de cartón y papel, se dispone de una pieza de cartón cuadrada de lado $a$ y se quiere hacer una caja sin tapa recortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando sus lados. ¿Cuál debe ser la longitud del lado del cuadrado que se recorta para que el volumen de la caja sea máximo? (Ver figura 4.51)

**Resolución:**

Si los cuadrados recortados en las esquinas son de lado $x$, el volumen de la caja será $V(x)=x(a-2x)^2$, con $0 \le x \le a/2$. Puesto que V es continua en $[0, a/2]$, debe tener un máximo absoluto.

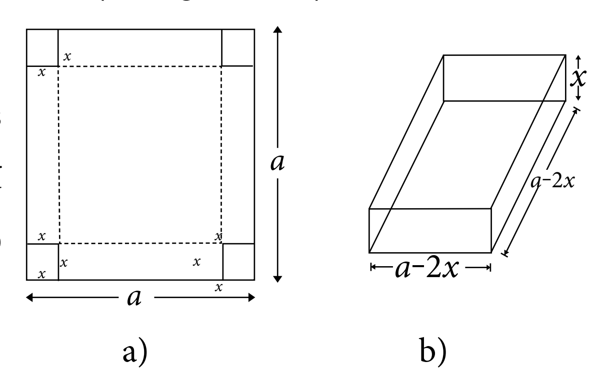



Figura 4.51

Como:

$$V'(x) = (a-2x)^2 - 4x(a-2x)$$
$$= (a-2x)(a-6x)$$

Se ve que los únicos puntos críticos son $a/2$ y $a/6$.

Como $V(0) = V(a/2) = 0$ y $V(a/6) = 2a^3/27$, el máximo absoluto (y relativo en este caso) en $[0, a/2]$ , se alcanza para $x = a/6$ y tiene un valor $V(a/6) = 2a^3/27$.

**Respuesta:** la longitud del cuadrado recortado en las esquinas deberá ser de $a/6$ unidades de longitud.

**Ejemplo 30:**

Una **compañía de teléfonos** desea tender un cable desde un punto A situado en la orilla de un rio recto, de 300 metros de ancho, hasta un punto D situado en el otro lado del rio a 600 metros rio abajo. Si el costo por metro de cable bajo el agua es 25% más caro que por tierra. ¿Cómo se debe tender el cable, para que el **costo total sea mínimo?**

**Resolución:**

**En el trazo auxiliar de la figura 4.52** los puntos A y B están situados uno frente al otro y en lados opuestos del rio recto. El punto D está a 600 metros de B y en su misma orilla rio abajo. Sea Q el punto sobre la misma orilla y a una distancia $x$ de B donde termina el tramo de cable bajo el agua. De donde:

Distancia de B a Q: $x$ , $0 \le x \le 600$

Distancia de A a Q (longitud de cable bajo el agua); $y = \sqrt{(300)^2 + x^2}$
(Por qué)
Distancia de Q a D (longitud de cable por tierra); $600 - x$
Costo por metro de cable por tierra; $k$ (cte.)
Costo por metro de cable por agua: $1.25k$ (cte.)

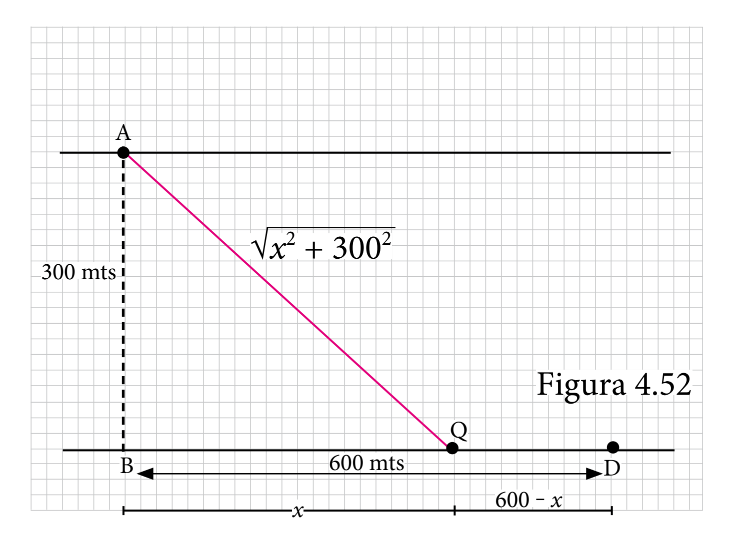


Figura 4.52

Por tanto el Costo total (función objetivo a minimizar) es:

$$C_T(x) = 1.25ky + k(600 - x) = 1.25k\sqrt{(300)^2 + x^2} + k(600 - x) \;\; ; \;\; 0 \le x \le 600$$

Ya que $C = C_T(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado correspondiente al dominio de la función, entonces alcanza un valor máximo y un valor mínimo en dicho intervalo [0, 600]. Al derivar $C = C_T(x)$ e igualar a cero, se obtienen los puntos críticos:

$$C'_T(x) = \frac{1.25kx}{\sqrt{(300)^2+x^2}} - k = 0 \;\; \Rightarrow \sqrt{(300)^2+x^2} = 1.25x$$

$$\Rightarrow (300)^2 + x^2 = 1.5625x^2 \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{(300)^2}{0.5625}} = 400 \text{ metros}$$

Así que $x = 400$ es el único punto crítico y de acuerdo al criterio de la segunda derivada, corresponde a un mínimo relativo (verifícalo). Recordando lo que se dijo al inicio de este apartado sobre los valores extremos, el mínimo absoluto debe estar entre el menor de los siguientes valores: $C_T(600)$, $C_T(400)$ y $C_T(0)$. Haciendo los cálculos encontramos que (Verifícalos):

$C_T(600) = 838.5$k (lo que significa que el cable se tiende directamente desde A hasta D, o sea, todo por el rio, con un costo de 838.5 $k$).

$C_T(400) = 825k$ (lo que significa que el cable se tiende una parte desde A hasta Q, y después otro tramo desde Q hasta D, con un **costo mínimo de 825 k** ).

$C_T(0) = 975.5k$ (lo que significa que el cable se tiende desde A hasta B y después otro tramo desde B hasta D, o sea, 300 metros por el rio, y 600 metros por la orilla opuesta, con un costo de 975 $k$).

**Respuesta:** Para que el costo sea mínimo, la compañía debe tender primero una parte del cable 400 metros rio abajo desde A hasta el punto Q, y después otro tramo de 200 metros desde Q hasta D.

**Ejemplo 31**: En condiciones de competencia perfecta, una empresa puede vender los artículos que produce a $500 por unidad. Si $C(x) = 2x^2 + 40x + 1400$ en pesos es el costo total de la producción diaria cuando se producen $x$ artículos. Determine el número de unidades que deben producirse diariamente a fin de que la empresa obtenga la máxima ganancia total diaria.

**Resolución:** Según los datos del problema la función objetivo de la ganancia G (igual a las Ventas menos los costos de producción) será

$$G(x) = 500x - C(x) = 500x - 2x^2 - 40x - 1400 = -2x^2 + 460x - 1400$$

Calculando su derivada y los puntos críticos: $G'(x) = -4x + 460 = 0 \Rightarrow x = 115.$

Como la función de la ganancia es continua en su dominio, entonces tiene valor un máximo o un mínimo. En este caso se trata de un valor máximo ya que $G''(x) = -4 < 0$ y es igual a:

$$G(x) = -2(115)^2 + 460(115) - 1400 = 25050 \text{ pesos}$$

**Respuesta:** La empresa debe producir y vender diariamente 115 artículos para obtener una ganancia máxima de $25 050.00.

**Ejemplo 32:** La virulencia de cierta bacteria se mide en una escala de 0 a 50 y viene expresada por la función $w(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 40$, donde $t$ es el tiempo (en horas) transcurrido desde que comienza en estudio ($t = 0$). Indicar los instantes de máxima y mínima rapidez de la virulencia en las 6 primeras horas y los intervalos en que esta crece y decrece.

**Resolución:** Primero se deriva la función para determinar sus puntos críticos

$$w(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 40 \Rightarrow w'(t) = 3t^2 - 18t + 15 = 0 \Rightarrow t_1 = 5 \text{ y } t_2 = 1$$

Aplicando el criterio de la segunda derivada se obtiene que:

$$w''(x) = 6t - 18 \Rightarrow w''(5) = 6(5) - 18 = 12 > 0 \text{ y } w''(1) = 6(1) - 18 = -12 < 0$$

Por tanto, en $t_1 = 5$ la función tiene una rapidez mínima igual a $w(5) = 15$, y en $t_2 = 1$ la función tiene una rapidez máxima igual a $w(1)=47$, ya que $w(0)=40$ y $w(6)=22$ Además, como puedes verificar, $w(x)$ crece desde 0 a 1 y desde 5 a 6, y decrece en el intervalo (1, 5). En suma, y en base a la escala dada, podemos decir que la máxima virulencia de la bacteria es a las 1 horas y la mínima a las 5 horas.

***ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE:***

**Act-48)** Descomponer el número e (número de Euler) en dos sumandos positivos de forma que la suma de los logaritmos naturales de los sumandos sea máxima. Y Calcula dicha suma.

**Act-49)** De todos los triángulos isósceles, cuya base y altura suman 40 cm., ¿cuál es la longitud de la base del que tiene área máxima?

**Act-50)** Con un trozo de alambre de 25 metros de longitud se quiere formar un rectángulo cuya área sea la mayor posible. Calcula sus dimensiones sin derivadas y con derivadas.

**Act-51)** Un alambre de 2 metros de longitud se corta en dos partes, formando con una de ellas un círculo y con la otra un cuadrado. ¿Cómo debe cortarse el alambre para que la suma de las áreas de las dos figuras sea mínima? ¿Y para que sea máxima?

**Act-52)** ¿Cuál es el punto de la curva $4y = x^2$ más próximo al punto $A\ (0, 4)$ ?

**Act-53)** Determina las dimensiones del rectángulo de máxima área y el de máximo perímetro inscrito en la elipse $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ con sus lados paralelos a los ejes de la elipse.

**Act-54)** calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima que tiene uno de sus vértices sobre la curva $y = e^{-x^2}$ y uno de sus lados sobre el eje X (fig. 4.53).

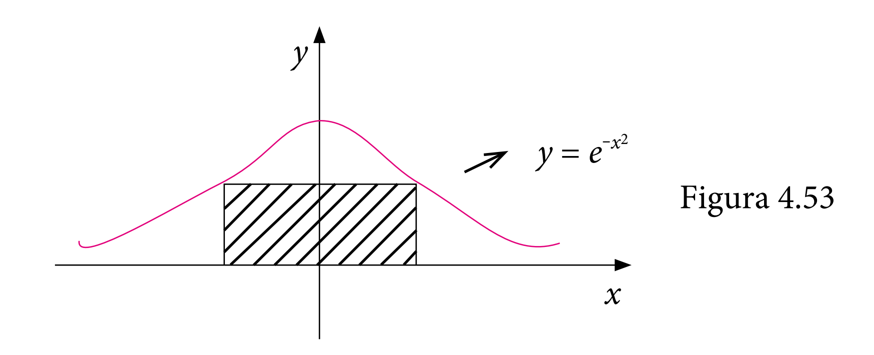



Figura 4.53

**Act-55)** Calcula la altura que debe tener un cilindro circular recto inscrito en una esfera de 6 m de diámetro, para que su volumen sea máximo.

**Act-56)** Calcula el radio del cono circular recto de volumen máximo que se puede inscribir en una esfera de 3 m de radio.

**Act-57)** Un envase cilíndrico debe contener 250cc de jugo. El costo de un cm$^2$ de material de las bases, es decir la parte superior e inferior del envase, es el triple que la de los laterales. ¿Cuáles son las dimensiones del envase menos costoso?

**Act-58)** Si se cuenta con 1000 cm$^2$ de material para hacer una caja con base cuadrada y la parte superior abierta, encuentre el volumen máximo posible de la caja.

**Act-59)** Una caja con base cuadrada y parte superior abierta debe tener un volumen de 3 m$^3$. Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material usado.

**Act-60)** De una hoja de cartón cuadrada de 40 cm de lado, hay que hacer una caja abierta que tenga el mayor volumen posible, recortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando después los salientes (fig. 4.54). ¿Cuál debe ser la longitud del lado de los cuadrados cortados?

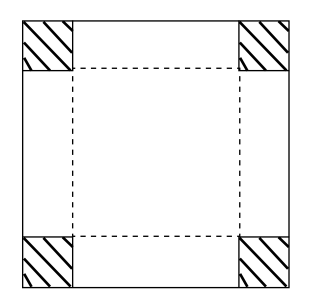


Figura 4.54

**Act-61)** Una hoja de papel para un cartel tiene una superficie de 2 $m^2$. Los márgenes superior e inferior miden 20 cm y los laterales 12 cm. ¿Cuáles son las dimensiones del papel si el área de la parte impresa es máxima?

**Act-62)** La concentración de agua en el suelo ha sido modelada para cierta región mediante la fórmula $y = 1 - e^{-x^2}$. Determina la profundidad $x$ donde la concentración c crece más rápido, y donde es máxima.

**Act-63)** Un gimnasio tiene la cuota mensual en 400 pesos. A ese precio se inscriben mensualmente un promedio de 600 clientes. Se quiere subir los precios y se estima que por cada aumento de 50 pesos se pierden 10 clientes ¿Qué precio se deberá fijar a fin de que el gimnasio obtenga el máximo ingreso?

**Act-64)** Un agricultor estima que en un terreno si se plantan 400 matas de aguacates, la producción estimada será de 350 Kg. por árbol y que por cada árbol que se deje de plantar la producción aumentará en 4 Kg. por árbol. ¿Cuál es el número de árboles que debe plantarse en el terreno a fin de obtener la máxima cosecha posible en el terreno? ¿Cuál es este valor máximo?

**Act-65)** El alcance de un proyectil (no tomando en consideración la resistencia del aire y otras causas perturbadoras) está dado por la fórmula $x = \frac{2V_0}{g}$ sen $\alpha \cdot$ cos $\alpha$, donde $V_0$ representa el valor de la velocidad inicial, g la aceleración debida a la gravedad y $\alpha$ el ángulo de tiro. ¿Qué valor ha de tener $\alpha$ para que el alcance del proyectil sea máximo?

**Act-66)** En el problema anterior, la altura del proyectil en el instante *t* está dada por la fórmula $h = v_0\, t \text{ sen } \alpha - \frac{1}{2} g t^2$. Halla la altura máxima que alcanza el proyectil para una velocidad inicial y un ángulo de tiro dados.

**Act-67)** Un recipiente cilíndrico de treinta litros de capacidad tiene en su parte inferior un pequeño orificio. Si el recipiente se llena de agua, se comprueba que en 30 segundos pierde un litro de líquido por el orificio. ¿Cuánto tiempo tarda el recipiente lleno en vaciarse por completo? (Sugerencia: investiga sobre el principio de Torricelli para resolverlo)

**Act-68)** Se diseña un proyecto de ingeniería para abastecer de agua a dos ciudades A y B de una misma estación de bombeo, que estará localizada en la rivera de un rio recto que está situado a 15 km de la ciudad A y a 10 km de la ciudad B. Si los puntos sobre el rio más cercanos a las ciudades están separados 30 km y si las ciudades están del mismo lado del rio, ¿Dónde deberá estar localizada la estación de abastecimiento para usar la menor cantidad de tubería?

**Act-69)** Dos postes verticales, PQ y ST, se aseguran por medio de un cable PRS extendido desde el extremo del primer poste hasta un punto R sobre el piso (y entre los dos postes), y desde R hasta el extremo superior del segundo poste. Demuestre que se tiene la longitud más corta de ese cable cuando los ángulos de elevación de los cables, respecto a la horizontal del piso, son iguales.

**Act-70)** Se está transportando un tubo de acero por un pasillo de 5 metros de ancho. Al final de éste existe una vuelta a ángulo recto hacia otro pasillo más angosto de 3 metros de ancho. ¿Cuál es la longitud del tubo más largo que se puede hacer pasar horizontalmente por la esquina?

**Act-71)** Un nadador A, se encuentra a 2 km de la playa enfrente de una caseta. Desea ir a B, en la misma playa, a 8 km de la caseta. Sabiendo que nada a 3 km/h y que camina por la arena a 5 km/h, calcula a qué lugar debe dirigirse a nado para llegar a B en el menor tiempo posible.

**Act-72)** Se va a tender un ducto de gasolina desde una planta de PEMEX ubicada a un lado de un río de 400 metros de ancho hasta una industria que se encuentra al otro lado, 2000 metros río arriba de la planta. El costo de tender el ducto por debajo del agua es 3000 millones por kilómetro y sobre tierra es de 2000 millones por kilómetro. El ducto seguirá la orilla del río a partir de la planta una distancia de $x$ kilómetros y luego cruzará diagonalmente el río en línea recta directamente hasta la industria. Determina el valor de $x$ que minimiza el costo total.

**Act-73)** En una carretera a través del desierto un automóvil debe de ir desde la ciudad A hasta el oasis P situado a 600 Km de distancia de A. Puede aprovechar para ello una carretera recta que une las ciudades A y B y que le permite ir a una velocidad de 110 Km/h, mientras que por el desierto la velocidad es de 70 Km/h. Sabiendo que la distancia más corta de P a la carretera que une las ciudades A y B es de 300 Km, determina la ruta que deberá usar para ir de A a P en el menor tiempo posible.

**Act-74)** Para un pez que nada a una velocidad $v$ con relación al agua, el consumo de energía por unidad de tiempo es proporcional a $v^3$. Se cree que el pez migratorio trata de minimizar la energía total requerida para nadar una distancia fija. Si nada contra una corriente $u$ $(u < v)$, el tiempo requerido para nadar una distancia $L$ es $\frac{L}{v-u}$ y la energía total E necesaria para nadar la distancia se expresa mediante el modelo funcional $E(v) = av^3 \cdot \frac{L}{v-u}$; *a* = cte. de *proporcionalidad*

Determina el valor de $v$ que minimice la energía del pez.

**Act-75)** La concentración de un medicamento $t$ horas después de haber sido inyectado en el brazo de un paciente está dada por: $c(t) = \frac{0.16t}{t^2 + 0.82}$. Determina cuando ocurre la máxima concentración del medicamento.

**Act-76)** Cuando una persona tose, el radio de su tráquea disminuye afectando la velocidad del aire en la tráquea. Si $r_0$ es el radio normal de la tráquea, la relación entre la velocidad $v$ del aire y el radio $r$ de la tráquea durante la tos se puede modelar por una función de la forma $v(r) = kr^2(r_0 - r)$ donde $k$ es una constante positiva. Calcula el radio $r$ para el cual la velocidad del aire es máxima.

**Act-77)** Una epidemia se propaga en una comunidad de manera que $t$ semanas después de su brote, el número de personas residentes infectadas esta dado por el modelo matemático $N(t) = \frac{A}{1+C\,e^{-kt}}$, donde, C y $k$ son constantes y A es el número total de residentes susceptibles de contraer la epidemia. Si C=76, $k$= 1.2 y A=80 mil, determina: (a) la rapidez de propagación de la epidemia al final de la tercera semana, (b) el tiempo en que se propaga más rápidamente la epidemia.

**Act-78)** Se ha estimado que dentro de $t$ años la población de cierto país será $P$ millones de habitantes, donde $P(t) = \frac{35}{1+2e^{-0.6t}}$ . (a) Grafica la función (b) ¿Cuál es la población actual? (c) ¿Cuál será la población en 25 y 40 años? (d) ¿Qué le pasa a la población a “largo plazo”?



# ANEXO I:

## ENFOQUE PEDAGÓGICO-DIDÁCTICO DEL CURSO DE CÁLCULO I (CÁLCULO DIFERENCIAL)

El **enfoque pedagógico** considerado como el más pertinente y congruente para el desarrollo de las competencias disciplinares básicas de la asignatura de **Cálculo I**, y del área de matemáticas en general, se fundamenta epistemológicamente en el paradigma constructivista, y psicopedagógicamente está **centrado en el aprendizaje del estudiante**, así como en su desarrollo personal y social. Esto en razón de que desde los enfoques constructivista y humanista, el estudiante es considerado como un sujeto activo y responsable de su propio aprendizaje y de su crecimiento personal, que logra aprendizajes significativos solo a través del desarrollo de actividades previamente motivadas por conflictos y/o problemáticas contextualizadas en sus entornos reales o perceptivos inmediatos.

En consecuencia, el maestro de **Cálculo I** durante su práctica docente en el aula deberá poner atención a las problemáticas y necesidades cognitivas y personales de los alumnos, en aras de planificar y desarrollar una docencia que atienda la diversidad personal, cognitiva y cultural, y que a su vez también esté contextualizada en las problemáticas y demandas sociales actuales. Atender estas dimensiones de la formación será de gran relevancia para contrarrestar los efectos negativos de la desmotivación y fobia que tienen muchos de los estudiantes hacia el estudio de las matemáticas.

De lo anterior se deriva un modelo de práctica docente congruente con la RIEMS, y con los propósitos y contenidos curriculares del área de matemáticas del bachillerato de la UAS, en los cuales se demandan que el maestro de matemáticas deberá promover y facilitar el desarrollo de un conjunto de competencias en el estudiante, tal que, se eleven y mejoren su autoestima, autoconcepto e inteligencia emocional, así como, su formación como ciudadano moralmente responsable, solidario, tolerante, crítico y democrático.

Desde este enfoque pedagógico, el contenido matemático escolar deberá plantearse sobre la base del campo de intereses y de conocimientos previos del alumno, de tal suerte que lo visualice como una oportunidad para alcanzar sus metas personales y sociales. En este sentido, la intervención docente debe darse siempre con tacto pedagógico proponiendo actividades de aprendizaje dentro de la zona de desarrollo próximo del estudiante, procurando elevar gradualmente la dificultad del ejercicio y/o problema, en aras de no frustrarlo y propiciar el desarrollo de las competencias genéricas y disciplinares básicas que conformará su perfil de egresado.

Estos requerimientos de formación y práctica docente muestran que el problema didáctico crucial para el desarrollo de competencias matemáticas en la reforma y currículo actual del bachillerato, es cómo motivar y activar a los estudiantes para que desarrollen competencias que les posibiliten lograr aprendizajes profundos y de alta calidad. De donde, en aras de que los aprendizajes logrados en los estudiantes sean significativos y funcionales, y de disminuir los altos índices de reprobación, se hace necesario desarrollar la docencia con un nuevo enfoque didáctico congruente con un enfoque constructivista centrado en el aprendizaje individual y cooperativo del estudiante, donde el contenido de aprendizaje se estudie preferentemente contextualizado y con un enfoqué de resolución de problemas y de análisis y autoevaluación constructiva de aciertos y errores.

***¿Por qué con un enfoque didáctico de resolución de problemas?***

Es importante enfatizar que en la actividad de formular y resolver problemas se despliegan e integran las más variadas motivaciones y actividades características del quehacer matemático competente. Por esta razón el ***enfoque didáctico de este programa de Cálculo I*** está orientado a la formulación y resolución de problemas tanto en lo individual como grupal.

En consecuencia la intervención didáctica del docente se enfocara inicialmente a la **problematización del contenido de aprendizaje**, con el objetivo de generar, facilitar, gestionar y evaluar procesos de aprendizaje que tengan que ver con la resolución de ejercicios y, principalmente, con la formulación y resolución de problemas matemáticos escolares contextualizados, a fin de promover, en el estudiante, la motivación y el desarrollo de sus actitudes y habilidades del pensamiento que le demanda su entorno social, científico y tecnológico.

Dicho enfoque didáctico, entendido como un conjunto de principios generales pero con flexibilidad para adaptarse al contexto y a la personalidad de un docente reflexivo y éticamente comprometido en la superación personal y social del estudiante, y de sí mismo, está fundamentado en una psicopedagogía humanista y constructivista, donde están consideradas las diversa dimensiones del aprendizaje que muestran que las percepciones, actitudes, emociones, la cognición, el contexto, la aplicación y el aprendizaje son inseparables.

O sea, que para promover aprendizajes de manera profunda y significativa el método de enseñanza debe partir de los intereses y conocimientos previos de los alumnos, y no haciendo alusión a conceptos abstractos e independientes de la situación donde aparecen, por ende, los contenidos escolares no deben ser consideramos como entidades abstractas y auto-contenidas e independientes de las situaciones en que son aprendidos y utilizados.

Además, como las concepciones espontáneas o conocimientos previos pueden ser una ayuda o un obstáculo epistemológico para la apropiación de las versiones formalizadas del conocimiento, el maestro debe tener cuidado en distinguir las estructuras cogni-

tivas previas y las estructuras formalizadas de la ciencia que están involucradas en los nuevos aprendizajes. Pues dichas estructuras formales solo pueden construirse a través de una intensa actividad gradual de abstracción que parte de las estructuras cognitivas “espontáneas”.

Atender estas dimensiones del aprendizaje, sin duda alguna, redundará en una mejor motivación intrínseca y extrínseca, que facilitará los aprendizajes profundos, autorregulados y significativos. En este sentido, es claro que el enseñar y aprender matemáticas mediante la comprensión fría de conceptos y la aplicación de reglas y algoritmos, no permite desarrollar habilidades cognitivas y metacognitivas, ni actitudes y formas de pensar consistentes con el quehacer de la comunidad científica, donde la actividad de producir se realiza en forma más placentera con conocimiento del medio y de los recursos disponibles.

Es pertinente aclarar que durante la problematización del contenido de aprendizaje el contexto de los problemas no siempre debe incluir descripciones o fenómenos de la “vida real”, lo que realmente interesa es que la situación incorpore algunas experiencias previas de los estudiantes y que los predisponga psicológicamente a enfrentar la situación problemática. Así, un problema situado en un contexto puramente matemático, como por ejemplo el completar un “cuadrado mágico”, puede ser un medio o contexto interesante para desarrollar competencias y estrategias importantes asociadas con el quehacer matemático.

Durante la enseñanza y aprendizaje de la **Cálculo I**, con enfoque de formulación y resolución de problemas el estudiante deberá ser formado para el conocimiento y aplicación de algunas estrategias heurísticas básicas tales como: representar de diversas formas la información de los conceptos o datos y relaciones del problema usando tablas o diagramas, reformular el problema o recurrir a problemas similares, descomponer el problema en casos más simples, usar analogías, etc. Estas estrategias no son solamente importantes en la fase de entendimiento del problema, sino también en el diseño y desarrollo de un plan de resolución. Durante las actividades de aprendizaje es importante que el estudiante se enfrente a numerosos y diversos tipos de problemas no rutinarias.

Durante el proceso de **desarrollo de las competencias matemáticas de Cálculo I,** si bien es cierto que los aspectos operativos y algorítmicos del Cálculo son importantes, y por ende no deben dejarse de lado, también es cierto que los conceptos básicos subyacentes a tal operatividad deben ser construidos y comprendidos por los estudiantes si se quiere que desarrollen competencias para aplicarlos correctamente en otras disciplinas y en la misma matemática. Por tanto, el maestro desarrollará el curso mediante una metodología de enseñanza que equilibre los enfoques conceptuales, intuitivos, numéricos, algebraicos, variacionales y funcionales (o de aplicaciones). Procurando que la formalización sea más frecuentemente un punto de llegada (cuando sea esta posible) y no de partida.

En consecuencia, los conceptos básicos del **Cálculo Diferencial** serán abordados inicialmente desde una perspectiva tanto geométrica (gráfica) como numérica, promoviendo y utilizando donde sea posible la intuición y la visualización, evitando caer en formalismos carentes de experiencia matemática previa. Así, los conceptos de límite y continuidad, se introducen en un contexto empírico-experimental (mediante ejercicios de análisis, evaluación y graficación de funciones) que sea familiar al estudiante, sin pretender necesariamente justificarlos rigurosamente desde un enfoque teórico-axiomático.

Posteriormente, se analiza y cuantifica el cambio o variación que experimentan algunas funciones que resulten de la modelación matemática de alguna problemática concreta. Finalmente, en contextos geométricos y físicos se conceptualiza informalmente la derivada de una función como tipos particulares de límite de una razón de cambio, al mismo tiempo, que se le interpreta geométricamente como pendiente de una curva y físicamente como velocidad instantánea respectivamente. De donde, se sientan las bases para las aplicaciones en diversas áreas del conocimiento.

***¿Por qué con un enfoque didáctico de análisis y autoevaluación constructiva de aciertos y errores?***

Un aspecto formativo de gran importancia en la resolución de problemas matemáticos está relacionado con el manejo de los recursos disciplinares, cognitivos y actitudinales. Es decir, el estudiante no sólo deberá centrarse en la comprensión de las ideas asociadas a las definiciones, hechos básicos, notaciones y conceptos fundamentales, sino darle también oportunidad de desarrollar una serie de experiencias para el desarrollo de sus hábitos mentales donde se apunte a un manejo eficiente de estos recursos, lo cual está íntimamente ligado con el uso de diversas estrategias de evaluación y autoregulación del proceso de aprendizaje.

Así pues, dentro del salón de clases, es importante que los alumnos acepten la necesidad de reflexionar constantemente acerca de las diversas representaciones y estrategias cognitivas y metacognitivas que aparecen, tanto al entender las ideas o conceptos como al resolver diversos tipos de problemas. El aprendizaje autorregulado, es pues de suma importancia para la transferencia del aprendizaje situado, y para la autoevaluación ya que los estudiantes centran personalmente su atención en como activan, mantienen, modifican y transfieren sus prácticas de aprendizaje en contextos específicos.

Además, la solución de un problema debe acompañarse de una reflexión y evaluación de los diversos métodos de solución. Ya que, al intentar resolver un problema, muchas veces no es suficiente llegar a la solución, sino que es necesario, además, seleccionar el método más adecuado para encontrarla.

En este sentido, un aspecto fundamental en el desarrollo de la clase es que el maestro ilustre los “movimientos reales” que emplea cuando el mismo interactúa o resuelve problemas novedosos para él. Así, en lugar de presentar un conocimiento acabado y pulido,

el maestro mostrará a los estudiantes las ideas y estrategias que intervienen durante todo el proceso de solución. De esta manera, al resolver los problemas los alumnos tienen en todo momento la oportunidad de observar y construir modelos conceptuales de los elementos que intervienen en la solución.

De donde, **es importante que se presenten y analicen en el grupo los aciertos e intentos fallidos o errores cometidos durante el proceso de resolución,** así como las técnicas de recuperación que generalmente ocurren durante la solución. Además, las actividades de aprendizaje y, en general, los problemas que se discuten durante la clase deben ser puntos de partida para una exploración más global de las ideas, conceptos y métodos. Todos estos componentes y elementos didácticos, que deben estar presentes en las estrategias de enseñanza, ubican a la matemática, no como un cuerpo de conocimiento fijo, pulido y acabado, sino como una disciplina en donde es posible que el estudiante desarrolle idas novedosas y reformule o diseñe sus propios problemas.

En consecuencia, de vez en cuando es recomendable que el maestro intente resolver problemas que sean nuevos para él frente a sus alumnos, así podría ilustrar de manera más realista los procesos de resolución de problemas, algunos de estos problemas pueden ser sugeridos por los propios estudiantes. Lo anterior se justifica porque el profesor de matemáticas al preparar el tema o los problemas de clase, algunas veces sigue varias formas de solución equivocadas antes de tomar un camino correcto determinado. Este proceso, que el maestro realiza antes de llegar a la clase, generalmente no lo observan los estudiantes, y en razón de ello se quedan con la idea negativa de que ellos no tienen, ni tendrán, las "habilidades extraordinarias" del maestro. Por ello, esta actividad puede jugar un papel motivador importante en el desarrollo de la autoestima y el pensamiento matemático realista en los estudiantes.

***¿Por qué a través del trabajo individual y grupal o colectivo?***

La psicología social ha puesto en evidencia que la gente desarrolla sus valores, creencias y pautas culturales como resultado de una interacción social generalmente inconsciente. De igual manera, los estudiantes durante la interacción grupal de la comunidad escolar desarrollan un sentido particular de lo que es la empresa matemática. Se presume, como sostiene **Schoenfeld (1994)**, que la creación de un "microcosmos matemático" en el aula es el medio propicio para que el estudiante desarrolle estrategias y habilidades propias del quehacer matemático. Y también para el desarrollo de actitudes positivas y de competencias ciudadanas para una sociedad democrática.

O sea, si los estudiantes tienen la oportunidad de observar y practicar las actividades que muestran los miembros de una **"cultura matemática"**, entonces entrarán en contacto con las diversas formas de utilizar el lenguaje, y podrán desarrollar pensamientos y acciones de los expertos de la disciplina y comenzarán gradualmente a actuar de acuerdo con sus normas y estrategias. Esto respalda la importancia de desarrollar un "***microcosmos matemático en el salón de clase"***, donde el aprendizaje de las matemáticas podrá

generarse como una práctica que se desarrolla dentro de una comunidad en constante interacción, en la cual los estudiantes tienen la oportunidad de participar como miembros activos de esa comunidad. Esto no quiere decir que se espera que todos los estudiantes lleguen a ser matemáticos, sino que sea parte de la idea de que para aprender las competencias de la disciplina, los estudiantes necesitan desarrollarse dentro de una situación escolar que refleje de manera auténtica la actividad de los matemáticos.

En razón de las ideas anteriores el profesor promoverá en el aula **la interacción grupal** cooperativa entre los alumnos, pues ella es una variante de enseñanza y de aprendizaje congruente con la idea de comunidad de practicantes o aprendices que hemos estado manejando, y resulta muy efectiva en el desarrollo de una psicopedagogía activa centrada en el estudiante y de una didáctica centrada en la resolución de problemas.

Hay que tener siempre presente que cuando los estudiantes trabajan en grupos cooperativos pequeños durante la clase, ya sea para resolver problemas o ejercicios matemáticos, participan activamente sugiriendo y explorando conjeturas y pueden evaluar constantemente sus ideas. Con esta modalidad de promoción del aprendizaje es común que los estudiantes logren construir o desarrollar por sí mismos las estrategias matemáticas necesarias para trabajar los problemas particulares y, finalmente, el logro de aprendizajes matemáticos escolares significativos y funcionales.

Ya que hay una similitud entre el aprender matemáticas y aprender la cultura dentro de una comunidad de practicantes, la enseñanza que promocione competencias (aprendizaje significativo y funcional) debe ser un asunto de maestros y aprendices que trabajan en una comunidad y ambiente de prácticas contextualizadas, inteligentes y responsables, que desarrollan todas sus potencialidades y habilidades en la formulación y resolución de problemas de su interés. Por tanto, el quehacer en el aula no debe ser esencialmente diferente a muchas de las actividades que los científicos realizan cotidianamente en sus investigaciones. Así pues, el proceso de aprender y enseñar matemáticas en el aula lo podemos desarrollar en un ambiente similar al de los científicos cuando trabajan con las ideas y problemas de la ciencia.

En este ambiente de aprendizaje, el estudiante discute sus ideas con sus compañeros, presentan conjeturas acerca del comportamiento e implicaciones de ciertas ideas o conceptos, utilizan ejemplos y contraejemplos para convencerse a sí mismo y a otros de los resultados, y plantean sus propios problemas. Es decir, nuestros alumnos aprenden creativamente identificando, seleccionando y usando estrategias comúnmente usadas por los científicos al resolver problemas.

En suma, este microcosmos científico en el aula es el ambiente y el medio propicio para que el estudiante desarrolle valores, estrategias y habilidades propias del quehacer científico y de la vida social. O sea, para lograr el desarrollo de competencias matemáticas o de la promoción de aprendizajes escolares significativos y funcionales.

En el proceso de aprendizaje/enseñanza del Cálculo I, es conveniente que los estudiantes también hagan presentaciones individuales al resto del grupo ya que así aprendan a comunicar sus ideas y a desarrollarlas alrededor de un argumento. En esta fase es común que el estudiante tenga que recurrir a diversos ejemplos, contraejemplos o utilizar diferentes representaciones para convencer que lo que presenta posee cierta estructura o consistencia. Convencer, de hecho, debe ser una prioridad en la presentación de los estudiantes.

El papel del maestro durante esta actividad es observar el trabajo de sus alumnos, ofrecer alguna ayuda cuando se necesite, y presentar algunas preguntas que favorezcan la articulación de las ideas. El maestro, en ciertos momentos, también coordina y evalúa las ideas sugeridas por los estudiantes, y en algunos casos, también debe saber y poder cuestionar y promover la participación de sus estudiantes.

También es necesario que durante todo el proceso de enseñanza/aprendizaje del Cálculo I, exista retroalimentación y evaluación constante durante el desarrollo de todas las actividades de aprendizaje (Evaluación formativa). Por ejemplo, durante la discusión en grupos pequeños, las ideas que emergen durante la interacción entre ellos son evaluadas por los integrantes del grupo (Co-evaluación). Posteriormente, cuando los estudiantes presentan sus ideas a todo el grupo, tanto el grupo en su conjunto como el maestro interactúan y evalúan las ideas y pueden sugerir alternativas de solución. La retroalimentación de las ideas, aparece entonces como un aspecto esencial en todas las fases de la formación, en particular para enriquecer las experiencias de participación.

Con esta metodología activa de aprendizaje y enseñanza del Cálculo I, donde la clase es un taller permanente, todos los estudiantes tendrán la oportunidad de participar como miembros activos de esa comunidad de aprendices. Es decir, el salón de clases será un lugar donde se promuevan actividades que ayuden al estudiante a introducirse en la práctica del quehacer científico, donde desarrollaran de manera natural la disposición para realizar actividades que incluyan la formulación y evaluación de preguntas, problemas, conjeturas, argumentos y explicaciones, como aspectos de una práctica social, así como la de encontrar el sentido de las ideas o conceptos y las conexiones entre ellas.

***En resumen: el enfoque pedagógico y didáctico alternativo de enseñanza/aprendizaje que se propone para el desarrollo de las competencias disciplinares de matemáticas del bachillerato deberá estar centrado en la resolución de problemas escolares formales y contextualizados, el trabajo grupal cooperativo y el análisis y autoevaluación constructiva de aciertos y errores, y deberá desarrollarse en un ambiente, o microcosmos cultural de practicantes o aprendices, similar al de la comunidad científica.***

***Momentos y funciones didácticas***

El enfoque pedagógico y didáctico anterior puede concretarse en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo Diferencial a través de la implementación de los siguientes momentos y funciones didácticas, en los cuales el alumno es el protagonista principal:

**FD1) Motivación:** Problematización y contextualización del contenido de enseñanza y aprendizaje, así como creación de un ambiente y clima de aula que favorezca las actitudes y percepciones positivas para efecto de despertar en el alumno el deseo o interés para realizar las actividades de aprendizaje.

**FD2) Orientación hacia el objetivo:** clarificar al estudiante, sin adelantar conclusiones, el qué y para qué de la actividad o tarea de aprendizaje.

**FD3) Aseguramiento del nivel de partida:** reactivar o construir los conocimientos previos necesarios para construir e integrar el nuevo conocimiento que sirve de base para las actividades de aprendizaje y la competencia a desarrollar.

**FD4) Elaboración o desarrollo del nuevo contenido de aprendizaje:** plantear tareas (ejercicios o problemas inéditos) complejas que cuestionen y movilicen los recursos conceptuales, cognitivos y actitudinales del alumno al momento de su realización, y asesóralo en su proceso individual o grupal de resolución. Para el caso específico de la resolución de problemas el docente orientara a los alumnos en la aplicación de algunos principios heurísticos y en particular en el uso del **Programa Heurístico General de G. Polya**, el cual consta de las siguientes fases y actividades:

**Fase1:** Orientación hacia el problema / **Actividad de aprendizaje:** comprensión del problema.

**Fase2:** trabajo en el problema / **Actividad de aprendizaje:** búsqueda de la idea, estrategias y plan de solución, y reflexión sobre los medios y vías de solución.

**Fase3:** Resolución del problema / **Actividad de aprendizaje:** ejecución del plan de solución.

**Fase4:** Visión retrospectiva (Evaluación de la solución y de la vía) / **Actividad de aprendizaje:** comprobación de la solución y reflexión sobre los métodos aplicados.

**FD5) Consolidación y fijación del aprendizaje:** el profesor planteara a los alumnos tareas o actividades de investigación, profundización, aplicación contextualizada, sistematización, ejercitación y repaso del nuevo contenido de aprendizaje.

**FD6) Control y evaluación del aprendizaje:** el profesor y el alumno hacen una valoración reflexiva y critica sobre los aprendizajes logrados y sobre las ausencias y los errores cometidos en las tareas para efecto de tomar las medidas correctivas pertinentes para reorientar el proceso de enseñanza-aprendizaje en aras elevar la calidad del aprendizaje y de desarrollar cabalmente las competencias u objetivos curriculares.

# ANEXO II:

## TAREAS Y ACTIVIDADES PARA UNA EVALUACIÓN SUMATIVA

1. A partir de la definición de derivada, calcular $f'(x)$ de: $y=-6x^2+x-1$.
2. Usando fórmulas hallar la derivada de:

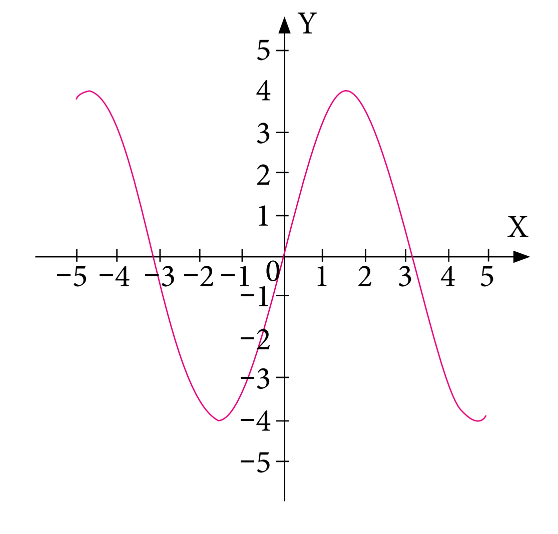
   (a) $y=sen(x)-\cos(x)+5e^{-10x}$ (b) $f(x)=\dfrac{(7x^3-2x)^2}{-5x^2+4}$ (c) $f(x)=(x+5)^3 \cdot In\,(x-1)$

3. De la función $y=x^3+2x^2-15x$, calcular:

   (a) La pendiente de su grafica en el punto $A(0,y)$
   (b) La ecuación de su recta tangente y normal que pasa por $B(2,y)$
   (c) sus valores máximos y mínimos relativos.
   (d) Los intervalos donde es creciente $\left(f'(x)>0\right)$ o decreciente $\left(f'(x)<0\right)$
   (e) Además, hacer un esbozo de su gráfica.

4. En base a la siguiente gráfica de la función $y=f(x)$, conteste lo siguiente:

   (a) ¿En que puntos $f'(x)=0$ ?
   (b) ¿En que intervalos es $f'(x)>0$?
   (c) ¿En que intervalos es $f'(x)<0$?
   (d) ¿Cuál es el máximo relativo de la función?
   (e) ¿Cuál es el mínimo relativo de la función?




5. Se quiere construir una caja abierta con base cuadrada empleando 450 de material. ¿Qué dimensiones debe tener dicha caja para que su volumen sea máximo?

6. Análiza y grafica las funciónes $y=\dfrac{x^2-1}{x-4}$ y $y=\dfrac{1}{6}(3x^4+4x^3-12x^2+5)$ , determinando monotonia, ascíntotas y simetrías, puntos de inflexión, concavidades y valores extremos (máximos o mínimos).

7. El costo de producción $(C)$ para producir $x$ unidades de cierto producto está dado por la función: $C(x)=-90x^{-1}+6x+8$. ¿Cuál es la razón o rapidez de cambio del costo de producción (costo marginal) respecto al número de unidades producidas cuando $x=18$?

8. La función de posición de una flecha que se lanza verticalmente hacia arriba es $y(t)=-4.9t^2+90t+30$, donde $y$ se mide en metros y $t$ en segundos. Calcule: (a) la velocidad a los 4 segundos (b) la altura máxima alcanzada (c) la velocidad de la flecha al caer al suelo y (d) el punto de donde se lanzo.

9. Determina el punto de la parábola $y=4x^2$ más próximo al punto $P(2, 7)$.

10. La página de un libro debe contener $500$ cm$^2$ de impresión con márgenes de $3$ cm por lado. Determinar las dimensiones mínimas de la página.

11. Un alambre de $100$ cm de largo se va a cortar en dos pedazos. Uno de ellos se usará para construir un cuadrado y el otro pedazo para construir un círculo. ¿Dónde deberá cortarse el alambre para que la suma de sus áreas sea?:

(a) Máxima ; (b) Mínima

12. Dos postes, uno de $12$ metros de altura y el otro de $28$ metros, deben colocarse verticalmente a $30$ metros de distancia uno del otro. Se desea sostenerlos por dos cables, conectados a una sola estaca, desde el nivel del suelo hasta la parte superior de cada poste. ¿Dónde debe colocarse la estaca para que se use la menor cantidad de cable?

13. La población $P(t)$ de cierta ciudad, en miles de habitantes dentro de $t$ años, está dada por la función $P(t)=-18(t+0.5)^{-1}$. Calcular la rapidez con que esta creciendo la población dentro de 30 meses.

14. Un recipiente cilíndrico de treinta litros de capacidad tiene en su parte inferior un pequeño orificio. Si el recipiente se llena de agua, se comprueba que en 40 segundos pierde un litro de líquido por el orificio. ¿Cuánto tiempo tarda el recipiente lleno en vaciarse por completo? (Sugerencia: investiga sobre el principio de Torricelli para resolverlo)

15. Cuando una persona tose, el radio de su tráquea disminuye afectando la velocidad del aire en la tráquea. Si $r_0$ es el radio normal de la tráquea, la relación entre la velocidad $v$ del aire y el radio $r$ de la tráquea durante la tos se puede modelar por una función de la forma $v(r) = kr^2(r_0 - r)$ donde $k$ es una constante positiva. Calcula el radio $r$ para el cual la velocidad del aire es máxima.

# Bibliografía de consulta para el estudiante y el profesor

**A) BÁSICA:**

1. Cuéllar, C. Juan Antonio. (2012). Matemáticas V: Cálculo Diferencial. México. Mc-GrawHill.
2. Fuenlabrada, Samuel. (2008). Cálculo Diferencial. México. McGrawHill.
3. GRANVILLE, W. A. (2006). Cálculo Diferencial e Integral. México, Editorial Limusa.
4. Larson, R.E. y Hostetler, P.R. y Edwrsds, H.B. (2009). Cálculo Diferencial: Matemáticas I. México, McGrawHill.
5. Salazar, Guerrero, Ludwing J. y Otros Autores. (2007). Cálculo Diferencial. México, Grupo Editorial Patria.
6. Oteyza, Elena. (2006). Conocimientos fundamentales de matemáticas: cálculo diferencial e integral. México. Pearson-Educación y UNAM.
7. Ortiz, Campos, francisco.(2006). Cálculo Diferencial. México, Editorial Patria.

**B) COMPLEMENTARIA:**

1. D. Hoffmann, Laurence y Otros autores. (2006). Cálculo Aplicado. México, Mc-GrawHill.
2. Hughes-Hallett y Otros Autores. (2004). Cálculo Aplicado. México, CECSA.
3. Cruse, A. B. y M. Lehman. Lecciones de Cálculo I. Introducción a la Derivada. Fondo Educativo Interamericano. 1982.
4. Hackett, S. O. y M. Sternstein. (1982). Cálculo por Objetivos. México, Editorial CECSA.
5. Mochon, S. (1994). Quiero entender el Cálculo. México. Grupo Editorial Iberoamérica.

# Cálculo I

Cálculo Diferencial Para Bachillerato

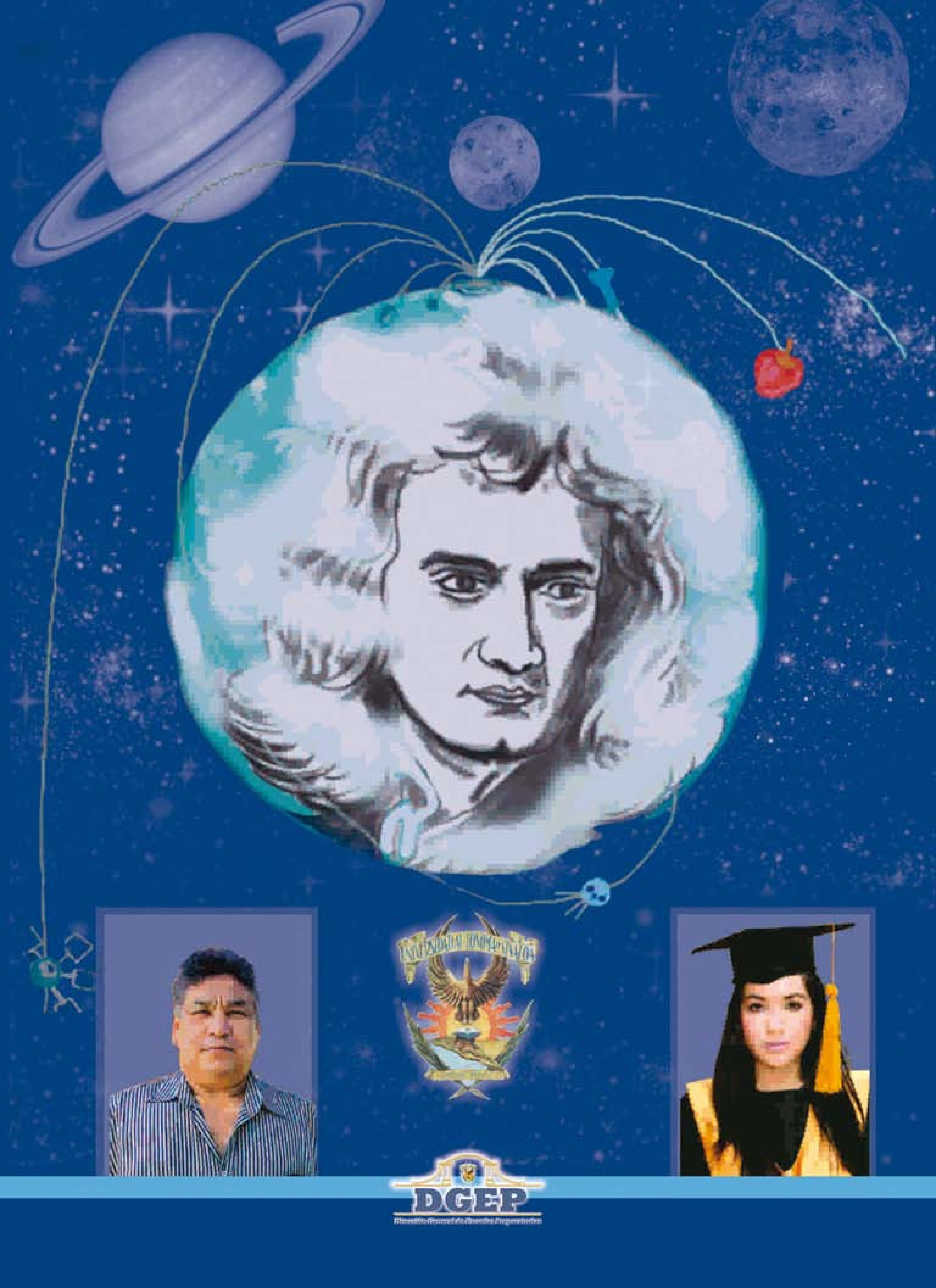
Arturo Ylé Martínez
José Alfredo Juárez Duarte
Faustino Vizcarra Parra

Revisión Técnica:

Dr. Armando Flórez Arco

Se terminó de imprimir en el mes Julio de 2012,
en los talleres gráficos de ***Servicios Editoriales Once Ríos***,
Rio Usumacinta 821, Col. Industrial Bravo, C.P. 80120
Culiacán, Sinaloa, México. Tel. 7-12-29-50.

La edición consta de 9, 000 ejemplares.



DGEP